LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MÉCHANIQUE, OU TRAITÉ ABRÉGÉ DU...

Nicolas Louis : de La Caille

Digitized by Google

FONDO PIZZOFALCONE

BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio XXXX

Palchetto

Num.° d' ordine 114 19 - 1838 - C - 23

NAZIONALE

B. Prov.

VITT. EM. III

2576

NAPOLI

Digitized by Google

Digitized by Google

B. Prov
I
2576

Digitized by Google

Digitized by Google

G08806

LEÇONS
ÉLÉMENTAIRES
DE MÉCHANIQUE,
OU
TRAITÉ ABRÉGÉ
DU MOUVEMENT
ET DE L'ÉQUILIBRE.

Par M. l'Abbé DE LA CAILLE, *de l'Académie Royale des Sciences, de celles de Peterſbourg, de Berlin, de Stockholm; des Sociétés Royales de Londres & de Gottingue; de l'Inſtitut de Bologne; Profeſſeur de Mathématiques au College Mazarin.*

AVEC FIGURES.

Nouvelle Édition, revue, corrigée & augmentée ſur l'Exemplaire de l'Auteur.

A PARIS,

Chez H. L. GUERIN & L. F. DELATOUR, rue S. Jacques, à S. Thomas d'Aquin.

M. DCC. LXV.

Avec Approbation & Privilege du Roi.

Google

Digitized by Google

AVERTISSEMENT.

QUAND MESME la Méchanique ne ſeroit que la ſcience des Machines, comme le fait entendre l'étymologie de ſon nom, on ne pourroit en conteſter l'utilité, ni même la néceſſité. Il eſt vrai qu'on rencontre encore des Machiniſtes, qui guidés uniquement par une certaine induſtrie naturelle, jointe à quelque adreſſe des mains, prétendent que ce talent leur ſuffit, & que l'étude des principes vantés par les Mathématiciens, ne ſerviroit qu'à éteindre le feu de leur génie, & à les empêcher d'inventer quelque choſe de nouveau. Ils ſe font encore illuſion, en ce qu'ils racontent, que les Machines les plus belles & les plus utiles, ont été trouvées par hazard, ou par des perſonnes dépourvues de ſciences. Je ne m'amuſerai point à réfuter ici de pareilles idées: ceux qui s'y livrent, pour excuſer leur pareſſe, ou pour ſe conſoler des reproches que leur ignorance leur attire ſouvent, ſont aſſez punis par le peu de fruit qu'ils tirent de leurs eſſais & de leurs dépenſes. Mais heureuſement cet ancien préjugé ſe diſſipe de plus en plus, & l'expérience a maintenant convaincu preſque tout le monde, que lorſqu'on s'eſt propoſé d'imaginer de nouvelles machines, ou de perfectionner les anciennes, on n'eſt ſûr d'avoir réuſſi, avant que de les faire exécuter, qu'à proportion qu'on a plus de connoiſſances Mathématiques & Phyſiques, & plus d'uſage & d'habitude dans la profeſſion d'Artiſte.

Digitized by Google

La Science qu'on appelle *la Méchanique*, embraſſe aujourd'hui bien d'autres objets que la deſcription & les propriétés des Machines. Elle s'étend en général ſur tout ce qui eſt capable de recevoir ou de communiquer du mouvement, & par conſéquent ſur toute la matiere dont l'univers eſt formé. C'eſt une ſcience preſque toute nouvelle, & dûe aux recherches des Mathématiciens modernes. Ce n'eſt pas une ſcience phyſico-mathématique, mais exacte, & fondée ſur des principes certains, & ſur les idées claires que nous avons du mouvement. Elle ne ſe borne pas à l'expoſition des vérités ſimplement curieuſes; car en cela elle ne différeroit pas de cette partie de la Philoſophie qu'on a appellée *la Phyſique ſpéculative*, qui n'eſt proprement que la ſcience du mouvement; mais après avoir diſtingué & combiné les cauſes de tous les phénomenes que le mouvement produit; après avoir calculé l'effet de chacune en particulier, & le réſultat général de leurs efforts réunis; après avoir par ce moyen développé tous les reſſorts ſecrets, qui font agir tous les corps, la Méchanique nous enſeigne les moyens ſûrs d'employer, le plus avantageuſement qu'il eſt poſſible, tout ce qui eſt à portée de nous dans la nature, pour nous ſoulager dans nos travaux en ſuppléant à notre foibleſſe, pour ſatisfaire à peu de frais à nos beſoins, & pour nous procurer toutes ſortes d'agréments. Par un calcul certain, qui nous met en état de prédire ce qui réſultera de l'aſſemblage des pieces dont on veut compoſer une machine, elle nous épargne des tâtonnements diſpendieux & les expériences en grand, qui ruinent & deſ-

Digitized by Google

honorent ſouvent le Machiniſte, lorſqu'incapable d'en prévoir le ſuccès, & d'en démontrer l'infaillibilité avant l'exécution, il l'entreprend par un excès de confiance ſur ſon talent.

Mais plus l'objet de la Méchanique eſt varié & étendu, plus il eſt difficile d'en réduire les principes en un ſyſtême clair & méthodique : auſſi n'avons-nous pas encore en François de livre qui les renferme tous d'une maniere ſatisfaiſante. Parmi les Auteurs les plus eſtimés qui ont écrit ſur cette matiere, les uns ſe ſont contentés d'en éclaircir quelques parties, d'autres nous ont donné des Théories générales, mais ſi ſublimes, qu'il eſt impoſſible d'y atteindre avant que d'avoir pénétré très-avant dans la haute Géométrie, & d'avoir acquis une grande habitude dans l'Analyſe infinitéſimale. Or lorſqu'on eſt parvenu à ce degré de connoiſſance, il arrive ordinairement qu'on aime mieux ſe frayer une route particuliere, & réſoudre ſoi-même les problêmes qu'on rencontre dans les livres de ces grands Méchaniciens, que de ſuivre leurs briſées, & d'étudier le procédé de leurs ſolutions.

Le devoir de ma profeſſion m'a obligé, il y a pluſieurs années, de raſſembler en un petit volume les vérités fondamentales de la Méchanique, & d'en éclaircir les propoſitions qui ſont les plus néceſſaires, ſoit pour avoir des notions du mouvement ſuffiſantes pour l'uſage ordinaire de la vie, ſoit pour mettre les jeunes Mathématiciens en état de profiter de la lecture des livres où la Phyſique eſt traitée d'une maniere plus relevée qu'à l'ordinaire, & de pouſſer eux-mêmes leurs

Digitized by Google

recherches plus loin : & quoique l'édition que j'en donne ici ſoit beaucoup plus ample & plus correcte que la premiere, qui n'étoit qu'un eſſai aſſez informe, je ne me flatte pas encore d'avoir réuſſi parfaitement. Je compte pourtant que ceux qui ſavent combien il eſt plus difficile de faire un livre vraiment élémentaire ſur une ſcience, que d'en étendre les limites par de nouvelles recherches ſur quelques-unes de ſes parties, ceux-là, dis-je, verront avec quelque plaiſir, le grand nombre de principes, que j'ai tâché de rendre intelligibles à ceux qui ſavent les Eléments d'Algébre & de Géométrie.

On trouvera dans ce livre deux ſortes de citations : les unes ſont des nombres en chiffre renfermés ſeuls entre deux crochets; ils indiquent un renvoi au numero marqué par ces chiffres dans ce Traité de Méchanique. Les autres citations ſont des nombres en chiffre précédés des lettres initiales, *Elem.* auſſi renfermés entre deux crochets; ils marquent un pareil renvoi à quelqu'un des numéros des *Leçons Elémentaires de Mathématiques* que j'enſeigne, & à l'Edition qui en a été faite en 1756 chez le même Libraire.

Digitized by Google

Extrait des Regiſtres de l'Académie Royale des Sciences.

Du 23 Février 1743.

MEſſieurs DE MONTIGNY & l'Abbé DE GUA ayant lu par ordre de l'Académie les *Leçons Elémentaires de Méchanique*, de M. l'Abbé DE LA CAILLE, & ayant fait leur rapport, l'Académie a jugé cet Ouvrage digne de l'impreſſion. En foi de quoi j'ai ſigné le préſent Certificat. A Paris ce 24 Février 1743.

DORTOUS DE MAIRAN, *Secr. perp. de l'Acad. Royale des Sciences.*

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu, Roi de France & de Navarre; à nos amés & féaux Conſeillers, les Gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand-Conſeil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Juſticiers qu'il appartiendra, SALUT. Nos bien-amés LES MEMBRES DE L'ACADEMIE ROYALE DES SCIENCES de notre bonne Ville de Paris, nous ont fait expoſer qu'ils auroient beſoin de nos Lettres de Privilége pour l'impreſſion de leurs Ouvrages : A CES CAUSES, voulant favorablement traiter les Expoſans, Nous leur avons permis & permettons par ces Préſentes de faire imprimer par tel Imprimeur qu'ils voudront choiſir, toutes les Recherches ou Obſervations journalieres, ou Relations annuelles de tout ce qui aura été fait dans les Aſſemblées de ladite Académie Royale des Sciences, les Ouvrages, Mémoires ou Traités de chacun des Particuliers qui la compoſent, & généralement tout ce que ladite Académie voudra faire paroître, après avoir fait examiner leſdits Ouvrages, & jugé qu'ils ſont dignes de l'impreſſion, en tels volumes, forme, marge, caracteres, conjointement ou ſéparément, & autant de fois que bon leur ſemblera, & de les faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de vingt années conſécutives, à compter du jour de la date des Préſentes; ſans toutefois qu'à l'occaſion des Ouvrages ci-deſſus ſpécifiés il en puiſſe être imprimé d'autres qui ne ſoient pas de ladite Académie : Faiſons défenſes à toutes ſortes de perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, d'en introduire d'impreſſion étrangere dans aucun lieu de notre obéiſſance; comme auſſi à tous Libraires & Imprimeurs d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, & débiter leſdits Ouvrages, en tout ou en partie, & d'en faire aucunes traductions ou extraits, ſous quelque prétexte que ce puiſſe être, ſans la permiſſion expreſſe & par écrit deſdits Expoſans, ou de ceux qui auront droit d'eux, à peine de confiſcation des Exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans; dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers auxdits Expoſans, ou à celui qui aura droit d'eux, & de tous dépens, dommages & intérêts; à la charge que ces Préſentes ſeront enregiſtrées tout au long ſur le Regiſtre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris,

Digitized by Google

dans trois mois de la date d'icelles ; que l'impreſſion deſdits Ouvrages ſera faite dans notre Royaume, & non ailleurs, en bon papier & beaux caractères, conformément aux Réglemens de la Librairie ; qu'avant de les expoſer en vente, les Manuſcrits ou Imprimés qui auront ſervi de copie à l'impreſſion deſdits Ouvrages ſeront remis ès mains de notre très-cher & féal Chevalier le ſieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, Commandeur de nos Ordres ; & qu'il en ſera enſuite remis deux Exemplaires dans notre Bibliothéque publique, un en celle de notre Château du Louvre, & un en celle de notredit très-cher & féal Chevalier le ſieur DAGUESSEAU, Chancelier de France, le tout à peine de nullité deſdites Préſentes : du contenu deſquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir leſdits Expoſans & leurs ayans cauſe pleinement & paiſiblement ſans ſouffrir qu'il leur ſoit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie des Préſentes, qui ſera imprimée tout au long, au commencement ou à la fin deſdits Ouvrages, ſoit tenue pour duement ſignifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conſeillers & Secrétaires, foi ſoit ajoutée comme à l'Original. Commandons au premier notre Huiſſier ou Sergent ſur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles, tous actes requis & néceſſaires, ſans demander autre permiſſion, & nonobſtant Clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : CAR tel eſt notre plaiſir. DONNE' à Paris le dix-neuvieme jour du mois de Février, l'an de grace mil ſept cens cinquante, & de notre Regne le trente-cinquiéme. Par le Roi en ſon Conſeil. MOL.

Regiſtré ſur le Regiſtre XII. de la Chambre Royale & Syndicale des Libraires & Imprimeurs de Paris, N. 430. Fol. 309. conformément au Réglement de 1723. qui fait défenſes, article 4. à toutes perſonnes, de quelque qualité & condition qu'elles ſoient, autres que les Libraires & Imprimeurs de vendre, débiter & faire afficher aucuns Livres pour les vendre, ſoit qu'ils s'en diſent les Auteurs ou autrement ; à la charge de fournir à la ſuſdite Chambre huit Exemplaires de chacun, preſcrits par l'art. 108. du même Réglement. A Paris, le 5 Juin 1750. Signé, LE GRAS, Syndic.

LEÇONS

Digitized by Google

LEÇONS ÉLÉMENTAIRES DE MÉCHANIQUE.

NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

Du mouvement en général, des circonſtances, & des différentes ſortes de Mouvements.

1.
LE Mouvement eſt le tranſport d'un Corps d'un lieu dans un autre. Le Repos au contraire eſt la demeure d'un corps dans un même lieu.

2. L'idée du Mouvement renferme 1°, Celle d'une force ou puiſſance qui le cauſe. 2°, Celle d'un Corps ou Mobile. 3°, Celle d'un eſpace ou chemin compris entre les termes du Mouvement. 4°, Celle du temps ou de la durée du Mouvement.

3. La comparaiſon de ces deux dernieres idées en forme une autre, qui eſt celle de la *Vîteſſe* du Mouvement: parce qu'on conçoit naturellement qu'un Corps a d'autant plus de vîteſſe qu'il parcourt plus d'eſpace en moins de temps, & réciproquement.

4. Les différentes vîteſſes & les différentes poſitions des eſpaces parcourus par les Corps, (qu'on appelle leurs *direc-*

Digitized by Google

tions) produiſent différentes ſortes de Mouvements.

5. Le *Mouvement abſolu* d'un Corps, eſt celui où l'on conſidere que ce Corps change réellement de place, par rapport aux bornes qu'on imagine dans l'eſpace immenſe qui remplit l'Univers.

6. Le *Mouvement relatif* d'un Corps, eſt celui où on le conſidere changeant de place, par rapport à des bornes priſes dans une partie déterminée de l'Univers.

On peut appliquer ces définitions au repos abſolu & au repos relatif; mais pour les faire comprendre par un exemple ſenſible, ſans entrer dans des diſcuſſions Métaphyſiques ſur la réalité du Mouvement abſolu, nous conſidérerons ce qui ſe paſſe par rapport à un homme qui eſt en mer ſur un vaiſſeau. S'il ſe tient aſſis ou debout, ſans changer de ſituation, tandis que le vaiſſeau marche, on conçoit que l'homme & le vaiſſeau ont un même mouvement abſolu, parce qu'ils approchent tous deux réellement d'un certain point du Monde; mais que l'homme eſt dans un repos relatif au vaiſſeau. Si l'homme marche dans un ſens oppoſé à la route du vaiſſeau, & avec la même vîteſſe que le vaiſſeau, cet homme n'a qu'un mouvement relatif au vaiſſeau, & reſte dans un repos abſolu par rapport aux différents points fixes de l'Univers.

7. Le *Mouvement réel* eſt celui qui s'exécute en effet dans le Corps qu'on voit en mouvement.

8. Le *Mouvement apparent* eſt une illuſion optique, occaſionnée par quelque mouvement réel, dont nous ne nous apperçevons pas, & que nous attribuons à des objets qui ne l'ont pas, du moins tel que nous le voyons. Un homme emporté par un vaiſſeau, & qui voit les bords de la mer fuir devant lui, eſt dans un mouvement réel & dans un repos apparent: & les bords de la mer ſont dans un repos réel, & ont un mouvement apparent.

9. Le Mouvement s'appelle *uniforme* lorſqu'un Corps parcourt des eſpaces égaux en temps égaux, ou qu'il conſerve toujours une même vîteſſe.

10. Le Mouvement eſt *accéléré* lorſque le Corps parcourt

Digitized by Google

des eſpaces qui en temps égaux deviennent de plus en plus grands, ou lorſque ſa vîteſſe va toujours en augmentant.

11. Le Mouvement eſt *retardé* quand un Corps parcourt des eſpaces qui en temps égaux vont en décroiſſant, ou quand ſa vîteſſe diminue continuellement.

En général le Mouvement eſt *uniforme*, *accéléré*, ou *retardé*, ſelon que la raiſon de l'eſpace parcouru au temps eſt conſtante, croiſſante ou décroiſſante.

12. De tous ces Mouvements les uns ſont *ſimples*, les autres *compoſés*; les uns ſe font en ligne droite, les autres dans des courbes de différentes eſpeces; les uns ſe font dans un même plan, les autres dans des plans différents.

Ce ſont tous ces Mouvements qui ſont le ſujet de ces Leçons.

Des Expreſſions des rapports dont on ſe ſert dans la Méchanique.

13. QUand deux quantités hétérogenes varient dans un certain rapport déterminé, comme ſi les différentes valeurs de la quantité variable x doivent toujours être proportionnelles aux valeurs de la quantité variable y, les Méchaniciens expriment ce rapport par une équation: par exemple, ils font, $x = y$, ce qui ne ſignifie pas x eſt égal à y (lorſque ces deux quantités ſont hétérogenes, car x, par exemple, peut repréſenter une force, & y un temps); mais cela ſignifie, x eſt toujours comme y: en ſorte que ſi x devient triple, par exemple, y devient auſſi-tôt triple. De même cette expreſſion $x = yz$ ſignifie, les valeurs de x ſont toujours entr'elles comme le produit des valeurs de y & de z, ou bien, les valeurs de x ſont en raiſon compoſée des raiſons directes des valeurs de y & de z. Cette expreſſion $x = \frac{yz}{ut}$ ſignifie, les valeurs de x ſont entr'elles comme le produit des valeurs de y & de z diviſé par le produit des valeurs de u & de t; ou bien, elles ſont entr'elles

Digitized by Google

en raiſon compoſée des raiſons directes des valeurs de y & de z, & des raiſons inverſes des valeurs de u & de t. On exprime quelquefois ce rapport en diſant, x eſt directement comme y & z, & réciproquement comme u & t. Enfin cette expreſſion $x = \frac{1}{yz}$ ſignifie, les valeurs de x ſont entr'elles en raiſon compoſée des inverſes des valeurs de y & de z : ou bien les valeurs de x ſont réciproquement comme yz.

14. Quand dans une formule algébrique il ſe trouve quelque quantité conſtante de ſa nature, ou qu'on ſuppoſe conſtante, ſoit qu'elle ſoit ſeule, ſoit qu'il y en ait pluſieurs, alors ſans changer le rapport entre les quantités variables qui ſont dans cette formule, on le rend beaucoup plus ſimple en mettant 1 à la place de chaque quantité conſtante, & en faiſant la réduction qu'exige cette ſubſtitution. Par exemple, dans la formule $p = \frac{abx}{cy}$, qui exprime une valeur abſolue de p, ſi on ſçait, ou ſi on ſuppoſe que a, b, c ſoient des quantités conſtantes, alors en les faiſant chacune $= 1$, & en ſubſtituant, la formule ſe réduira à $p = \frac{x}{y}$, ce qui n'exprime plus une valeur abſolue de p, mais le rapport de ſes différentes valeurs, ſelon que les valeurs de x & de y viendront à varier. De même, ſi dans la formule $q = \frac{at}{z}$ on fait at conſtant, reſtera $q = \frac{1}{z}$: ce qui ne ſignifie plus, q eſt égal à $\frac{1}{z}$, mais q varie en raiſon inverſe de z.

Digitized by Google

AXIOMES ou PRINCIPES

Sur lesquels toutes les Démonstrations de la Méchanique sont fondées.

15. I. *LEs effets sont proportionnels à leurs causes*, C'est-à-dire : un effet croît en même raison que l'action de la cause qui le produit ; il décroît en même raison que cette action décroît. En général, si une cause C produit un effet E, cette cause devenant mC, produira un effet mE : m signifie un coefficient quelconque entier ou fractionnaire.

16. Il suit de cet axiome, que *Si un effet dépend de plusieurs causes disparates ou hétérogenes*, ou que *si plusieurs circonstances différentes concourent à la production d'un effet, cet effet est toujours comme le produit des causes qui en croissant contribuent à augmenter cet effet, divisé par le produit des causes qui en croissant contribuent à le diminuer, ou qui ne peuvent contribuer à l'augmenter qu'en décroissant.* Autrement, *Un effet produit par plusieurs causes disparates, est en raison composée des raisons directes de toutes celles qui doivent croître pour augmenter cet effet, & des raisons inverses de toutes celles qui doivent décroître pour l'augmenter aussi.*

17. Pour faire comprendre cela par un exemple sensible, Soit un chariot qu'il faille conduire en quelque endroit. Il est clair que la facilité de ce transport ou effet E dépend de la charge P du chariot, du nombre N des chevaux qu'on y employe, de la vigueur V de ces chevaux, de la longueur L du chemin qu'il faut faire, de la facilité F de ce chemin, & du temps T qu'il faut employer à le faire. Or on voit que la facilité de ce transport augmentera de plus en plus à mesure que le nombre des chevaux, que leur vigueur, que la facilité du chemin & que le temps augmenteront, tandis que la charge & la longueur du chemin diminueront. Ainsi suivant ce principe, $E = \frac{NVFT}{PL}$.

Digitized by Google

Car si ces six conditions restoient toujours les mêmes, l'effet E seroit toujours le même, & alors cet effet E, & chacune des quantités P, N, V, F, L, T, pourroient être supposées = 1. Mais puisque nous cherchons ce qui doit arriver lorsque ces quantités varient, supposons que ces variations se fassent successivement, & que dans le premier instant cinq de ces conditions restant les mêmes, le nombre des chevaux vienne à augmenter dans le rapport de 1 à 3, ou que N devienne = 3; la facilité du transport E deviendra aussi-tôt triple, & E sera = 1 + 1 + 1 = 3 = N. Si dans l'instant suivant la vigueur de chaque cheval augmente dans la raison de 1 à 4, ou si V devient = 4, alors chaque cheval pourra faire un effort quadruple du précédent, & E deviendra 4 + 4 + 4 = 3 × 4 = NV. Si dans le troisieme instant le chemin devient plus facile dans le rapport de 1 à 5, ou si F devient = 5, chaque effort de chaque cheval contribuera au quintuple à faciliter l'effet E, qui deviendra = 20 + 20 + 20 = 3 × 4 × 5 = 60 = NVF. Si dans l'instant suivant on devient maître d'employer un temps double pour faire le voyage, T sera = 2, la facilité du transport deviendra double, & E sera 40 + 40 + 40 = 3 × 4 × 5 × 2 = 120 = NVFT. Si dans le cinquieme instant la charge vient à augmenter dans le rapport de 1 à 4, ou si P devient 4, alors l'effort de chaque cheval sur toute la charge n'a plus qu'un quart de l'effet qu'il avoit dans l'instant précédent; E devient donc = $\frac{40}{4} + \frac{40}{4} + \frac{40}{4}$ = 10 + 10 + 10 = $\frac{3 \times 4 \times 5 \times 2}{4} = \frac{120}{4} = 30 = \frac{NVFT}{P}$. Enfin si dans le sixieme instant il arrive qu'il faille faire un chemin double de celui d'auparavant, ou si L devient = 2, la facilité du transport diminue de la moitié, donc E sera = $\frac{10}{2} + \frac{10}{2} + \frac{10}{2} = 5 + 5 + 5 = \frac{3 \times 4 \times 5 \times 2}{4 \times 2} = \frac{120}{8}$ = $\frac{30}{2} = 15 = \frac{NVFT}{PL}$.

18. Voici maintenant comment on peut démontrer ce

corollaire. Si deux effets E, e ſont produits chacun par deux cauſes hétérogenes, P, Q; p, q qui en augmentant contribuent à augmenter chaque effet, je dis qu'on a $E : e :: PQ : pq$. Car ſuppoſons un troiſieme effet ε produit par les cauſes p, Q, ſi on veut comparer cet effet ε avec l'effet E, on voit que la cauſe Q influant également dans tous les deux, ils ſont entr'eux comme les cauſes différentes p, P, ou $\varepsilon : E :: p : P$. Donc $\varepsilon = \frac{Ep}{P}$. Si on compare enſuite cet effet ε avec l'effet e, on voit de même qu'à cauſe que les cauſes p ſont égales ou conſtantes, ces effets ne ſont entr'eux que comme les cauſes variables Q, q; & qu'ainſi $\varepsilon : e :: Q : q$; donc $\varepsilon = \frac{eQ}{q}$. Donc $\frac{Ep}{P} = \frac{eQ}{q}$ ou $Epq = ePQ$. Donc $E : e :: PQ : pq$ (Elem. 302). Ou en général $E = PQ$ (13).

19. Si un effet eſt produit par plus de deux cauſes, comme, par exemple, par les cauſes P, Q, R, la démonſtration ſera la même; car en ne ſuppoſant d'abord que R de conſtante, on aura (18) $E = PQ$: ſoit fait $PQ = X$; l'effet pourra donc être conſidéré comme produit par les cauſes X & R, & par conſéquent en ne ſuppoſant plus R conſtante, on aura $E = RX = PQR$.

20. Il en eſt de même pour les cauſes qui en augmentant, contribuent à diminuer l'effet, parce que l'effet eſt réciproquement comme cette cauſe (15); or (Elem. 299) la raiſon inverſe s'employe dans le calcul comme une raiſon directe, pourvu qu'on exprime la raiſon inverſe par une fraction dont l'unité ſoit le numérateur.

21. A l'égard des cauſes homogenes qui entrent dans la production d'un effet, on peut dire que *l'effet eſt comme la ſomme des cauſes homogenes, qui en augmentant contribuent à augmenter l'effet, moins la ſomme des cauſes homogenes, qui en augmentant contribuent à diminuer l'effet.* Car des cauſes homogenes ſont des cauſes qui agiſſent de la même maniere, & qui ne different que par le nom. Ainſi il eſt évident que toutes choſes d'ailleurs égales, la facilité de conduire

Digitized by Google

un chariot traîné par des chevaux, & pouſſé par des hommes, eſt en raiſon de la ſomme de la force de ces hommes & de ces chevaux.

22. AXIOME II. *Un corps n'a de lui-même aucune vertu, aucune force, pour changer ſon état de repos ou de mouvement.*

23. COROLL. I. *Donc ſi un corps eſt en repos, il y reſtera toujours juſqu'à ce qu'on lui applique extérieurement une cauſe qui le mette en mouvement. De même un corps une fois mis en mouvement y reſtera toujours juſqu'à ce que quelque cauſe l'arrête.*

24. COROLL. II. *Un corps qui a reçu une impreſſion pour ſe mouvoir, ſe meut toujours d'une même maniere proportionnée à cette impreſſion, ſans changer de route, & ſans augmenter ni diminuer ſa vîteſſe*: c'eſt-à-dire, *qu'il tend toujours à ſe mouvoir uniformément & en ligne droite.*

25. COROLL. III. *Un corps en mouvement ne peut décrire un polygone ou une ligne courbe, qu'il ne ſoit détourné de ſon chemin par quelqu'autre cauſe, à chaque fois qu'il décrit un des côtés finis de ce polygone, ou un des côtés infiniment petits de la courbe.*

26. COROLL. IV. *Un corps en mouvement ne peut augmenter ſa vîteſſe qu'il ne reçoive une nouvelle impulſion plus favorable que contraire à celle qu'il a déjà reçue, & il ne peut rallentir ſa vîteſſe, que quand il reçoit une nouvelle impulſion plus contraire que favorable à la précédente.*

27. REMARQUE I. Comme il n'y a pas d'effet ſans cauſe, & que le manque de force dans un corps pour changer ſon état, produit néanmoins tous les effets réels énoncés dans les Corollaires précédents, les Méchaniciens, appellent ce manque de force *inertie*. Il faut donc entendre par l'*inertie*, la propriété qu'ont tous les corps de reſter en repos ou de continuer leur mouvement en ligne droite. D'où il ſuit *que la réſiſtance qui s'oppoſe au changement d'état d'un corps, vient de ſon inertie.*

28. REMARQUE II. Il faut obſerver encore que les quatre Corollaires précédents ne doivent s'entendre que des mouvements abſolus, ou conſidérés comme abſolus, & non pas des relatifs.

Digitized by Google

29. AXIOME III. *Les actions mutuelles de deux corps l'un ſur l'autre ſont toujours égales & dans des directions oppoſées.* Autrement, *La Réaction eſt toujours égale à l'Action.* Ou bien encore, *Un corps n'agit pas ſur un autre, ſans y trouver une réſiſtance égale à ſon effort.*

On ne peut en effet concevoir une action Phyſique ſans un obſtacle, ni même une action plus forte qu'un obſtacle: & lorſqu'une action eſt plus foible que l'obſtacle, cette action devient ſans effet; mais elle n'eſt détruite que par une réſiſtance dans cet obſtacle égale & contraire à cette action.

Si je tire une pierre avec une corde, la corde eſt réellement & également tendue, ce qui fait voir que la réſiſtance de la pierre tire autant la corde vers la pierre, que l'action de ma main tire la corde vers moi: car ſi on vient à couper la corde vers le milieu, la partie de la corde qui eſt vers ma main ſe retirera par ſon reſſort vers ma main; & la partie qui eſt vers la pierre, s'y portera auſſi: or ſi la corde n'étoit pas tirée par la pierre, il eſt évident qu'elle devroit ſe porter vers ma main ſeulement.

Cet Axiome eſt donc une ſuite néceſſaire de l'inertie des corps, laquelle eſt proportionnelle à leur maſſe, ou à la quantité de matiere dont ils ſont compoſés.

Des différentes ſortes de Corps & de leurs propriétés générales.

30. UN Corps eſt un amas de *matiere*, c'eſt-à-dire, c'eſt un compoſé de la ſubſtance étendue ſuivant les trois dimenſions, dont nous avons parlé dans les Elémens de Géométrie.

31. Les propriétés de la matiere reconnues par tous les Philoſophes ſont 1°, qu'elle eſt *impénétrable*, c'eſt-à-dire, que deux ou pluſieurs parties diſtinguées ne peuvent occuper une même place. 2°, Qu'elle eſt *mobile*. 3°, Qu'elle eſt *diviſible en une infinité de parties*.

Digitized by Google

32. On considere dans un corps *sa figure*, *sa surface*, *sa solidité*, ou pour parler plus exactement *son volume*, & *sa masse*.

33. I°, L'expérience nous a appris qu'il n'y a pas de corps connu qui ne soit comme criblé d'une infinité de trous ou pores en tout sens. C'est ce qui fait qu'une certaine quantité de matiere occupe plus d'espace qu'elle n'en occuperoit sans cela, & ce qui a obligé de distinguer entre la masse & le volume. La masse est la quantité absolue de matiere qui compose un corps, & son volume est l'espace que ce corps occupe dans le lieu où il est : de sorte que si on pouvoit réduire un corps à n'avoir plus de pores, son volume deviendroit égal à sa masse.

34. Plus le volume approche d'être égal à la masse, ou plus un corps contient de matiere en moins d'espace, plus ce corps est *dense* ; & moins un corps contient de matiere dans un certain volume, moins ce corps est dense, ou plus ce corps est *rare*. Si donc on appelle M la masse d'un corps, S son volume, D sa densité, on aura (16) $D = \frac{M}{S}$, & c'est une formule par le moyen de laquelle on déterminera tous les rapports possibles entre les densités, les masses & les volumes des corps, de la même maniere qu'on déduira dans le premier théorême suivant tous les rapports des temps, des espaces & des vîtesses par une formule semblable.

35. II°, L'expérience nous a encore fait connoître que parmi les corps les uns sont *solides*, les autres *fluides*.

Les corps solides sont ceux dont toutes les parties restent naturellement unies & adhérentes entr'elles, comme une pierre, un bâton : & les fluides sont ceux dont toutes les parties cedent aussi-tôt à toute impression, & en y cédant se meuvent entr'elles très-facilement.

La Méchanique des corps fluides fera le sujet d'un traité particulier.

Les corps que nous connoissons participent plus ou moins de la dureté, de la molleſſe & de l'élasticité.

36. III°, Un corps parfaitement mol seroit celui qui

Digitized by Google

changeroit ſa figure d'une quantité finie par une impreſſion infiniment petite. Et un corps parfaitement dur ſeroit celui qui ne pourroit changer de figure que par une impreſſion infiniment grande : de ſorte que la molleſſe ou la dureté d'un corps ſe meſure par la force néceſſaire pour lui faire changer de figure d'une quantité finie.

37. IV°, Un corps parfaitement élaſtique eſt celui qui ayant changé de figure par une impreſſion quelconque, la reprend auſſi-tôt avec une force de reſtitution égale à celle de l'impreſſion : un corps eſt plus ou moins élaſtique, ſuivant que ſa force de reſtitution approche plus ou moins d'être égale à la force de compreſſion.

38. D'où il ſuit que *les corps qui ſeroient parfaitement durs, ou parfaitement mous, ne ſeroient pas élaſtiques.*

De la Puiſſance ou Force.

39. ON appelle *puiſſance* ou *force* toute cauſe qui exerce ſon action ſur un corps pour changer ſon état de repos ou de mouvement. Soit que ce changement ſe faſſe, ſoit qu'il ne ſe faſſe point.

40. L'effet de l'action d'une cauſe qui a mis un corps en mouvement eſt de lui avoir communiqué par ce mouvement une force égale à cette action, en ſorte qu'un corps en mouvement fait ſur un corps immobile qu'il rencontre un effort égal à celui que la force motrice a fait ſur lui. Cet effet nous eſt connu par toutes les expériences, & il ne manque jamais en vertu de la Loi que Dieu a établie librement pour la communication des mouvements.

C'eſt pour cela que nous entendrons quelquefois par le mot de *force*, une cauſe ou un effet d'un mouvement imprimé.

41. On appelle *force abſolue* tout l'effort dont une puiſſance eſt capable, & qu'elle exerce lorſqu'elle eſt appliquée le plus avantageuſement qu'il eſt poſſible par rapport à l'effet qu'on ſe propoſe : & *force relative*, tout l'effort

Digitized by Google

qu'une puiſſance peut exercer dans la circonſtance où elle ſe trouve appliquée.

On diſtingue différentes eſpeces de forces dont on donnera les définitions dans les différentes parties de la Méchanique, où l'on en examine la nature & les propriétés.

PREMIERE PARTIE.
DU MOUVEMENT RECTILIGNE.

Du mouvement rectiligne, réel, ſimple & uniforme.

42. ON entend ici par mouvement ſimple, celui qui n'eſt produit ou cenſé produit que par l'application d'une ſeule force, qui agit en un inſtant ſur un corps, & lui fait par conſéquent (24) décrire une ligne droite avec une vîteſſe uniforme. On verra cependant dans la ſuite qu'il n'y a pas de mouvement ſimple qu'on ne puiſſe regarder comme compoſé ; & réciproquement qu'il n'y a pas de mouvement rectiligne uniforme ſi compoſé, qu'on ne puiſſe le regarder comme produit par une ſimple action d'une ſeule force.

43. Dans le mouvement uniforme on conſidere les différents rapports des *vîteſſes*, des *eſpaces* parcourus, & des *temps* employés à les parcourir ; *la quantité du mouvement*, c'eſt-à-dire, les rapports des impreſſions que les corps ont reçues dans l'inſtant qu'ils ont été mis en mouvement ; & comme ils ſont capables de communiquer ces impreſſions aux autres corps qu'ils peuvent rencontrer, cette propriété, ou cette quantité de mouvement, s'appelle auſſi leur *force*.

44. THEOREME I. *Dans le mouvement uniforme, la vîteſſe eſt exprimée par l'eſpace diviſé par le temps*, ou ce qui eſt la même choſe, *les vîteſſes de deux corps mus uniformément ſont*

Digitized by Google

en raiſon compoſée de la directe de l'eſpace que chaque corps a parcouru, & de l'inverſe du temps que chacun a employé à parcourir cet eſpace. Ce théorême s'exprime analytiquement par $u = \frac{e}{t}$; u ſignifie la vîteſſe, e l'eſpace, t le temps.

DEM. L'eſpace comparé au temps fait connoître la vîteſſe (3). Or l'eſpace en augmentant exige une plus grande vîteſſe pour être parcouru dans un certain temps; & le temps en augmentant exige une moindre vîteſſe pour faire parcourir le même eſpace: donc (16) $\frac{e}{t} = u$.

45. COROLL. I. *Les vîteſſes ſont en temps égaux comme les eſpaces parcourus pendant ces temps;* car alors $t = 1$. Donc en ſubſtituant $u = e$.

46. COROLL. II. *Les vîteſſes employées à parcourir des eſpaces égaux ſont réciproquement comme les temps.* Car alors $e = 1$: Donc $u = \frac{1}{t}$.

47. COROLL. III. *Les vîteſſes de deux corps qui parcourent des eſpaces qui ſont en même raiſon que les temps, ſont égales entr'elles:* Car l'expreſſion de deux eſpaces en même raiſon que les temps, eſt compoſée de deux fractions égales, à ſavoir de chaque eſpace diviſé par chaque temps.

48. COROLL. IV. *Les vîteſſes de deux corps qui parcourent des eſpaces qui ſont entr'eux réciproquement comme les temps, ſont entr'elles ou directement comme les quarrés de ces eſpaces, ou réciproquement comme les quarrés des temps:* car l'expreſſion de l'eſpace en raiſon inverſe du temps eſt $e = \frac{1}{t}$, ou $\frac{1}{e} = t$; ſubſtituant donc dans la formule $u = \frac{e}{t}$, on a $u = \frac{1}{tt}$; ou $u = ee$.

En faiſant les mêmes raiſonnements & calculs ſur la formule $e = ut$, qui ſe déduit de la formule $u = \frac{e}{t}$, on trouve:

49. THEOR. II. *L'eſpace parcouru uniformément par un corps, eſt comme le produit de la vîteſſe par le temps; ou en raiſon compoſée de la vîteſſe & du temps.*

Digitized by Google

50. COROLL. I. *Les espaces parcourus avec des vîtesses égales, sont entr'eux comme les temps.*

51. COROLL. II. *Les espaces parcourus en temps égaux, sont comme les vîtesses.*

52. COROLL. III. *Les espaces parcourus en des temps proportionnels aux vîtesses, sont entr'eux comme les quarrés des vîtesses, ou comme les quarrés des temps;* car alors la raison composée des temps & des vîtesses est une raison doublée (Elem. 291), qui est la même que celle des quarrés d'une des deux raisons composantes (Elem. 298).

53. COROLL. IV. *Les espaces parcourus en des temps réciproquement proportionnels aux vîtesses, sont égaux entr'eux;* car en substituant $t = \frac{1}{u}$ ou $u = \frac{1}{t}$, la formule $e = u\,t$ devient $e = 1$.

54. THEOR. III. *Dans le mouvement uniforme, le temps est comme l'espace divisé par la vîtesse; ou en raison composée de la directe de l'espace & de l'inverse de la vîtesse;* car puisque $u = \frac{e}{t}$, on a $t = \frac{e}{u}$. Donc on aura aussi tous les rapports suivants, comme on a eu ceux des vîtesses.

55. COROLL. I. *Les temps employés à parcourir des espaces égaux, sont réciproquement comme les vîtesses.*

56. COROLL. II. *Les temps employés à parcourir des espaces inégaux avec des vîtesses égales, sont entr'eux comme ces espaces.*

57. COROLL. III. *Les temps employés à parcourir des espaces proportionnels aux vîtesses, sont égaux entr'eux.*

58. COROLL. IV. *Les temps employés à parcourir des espaces qui sont en raison inverse des vîtesses, sont entr'eux ou directement comme les quarrés des espaces, ou réciproquement comme les quarrés des vîtesses.*

59. THEOR. IV. *Dans le mouvement rectiligne uniforme, la force* f *ou la quantité de mouvement, s'exprime par le produit de la masse* m *du corps par sa vîtesse* u, *ou* $f = m\,u$.

DEM. Les corps dont les masses sont égales ont d'autant plus de vîtesse dans leurs mouvements uniformes, que la

Digitized by Google

force imprimée a été plus grande; & réciproquement plus ils ont de vîteſſe, plus la force imprimée a dû être grande. Donc à maſſes égales, la force ou quantité de mouvement eſt comme la vîteſſe. Mais à maſſes inégales, il faut employer d'autant plus de force pour donner une même vîteſſe, que la maſſe eſt plus grande : donc à vîteſſes égales, les forces imprimées aux corps mus uniformément ſont comme leurs maſſes : Donc en général, les forces ou quantités de mouvement ſont comme les produits des maſſes par les vîteſſes.

60. COROLL. De la formule $f=mu$ il eſt facile de conclure, que $m=\frac{f}{u}$, & $u=\frac{f}{m}$, & l'on peut tirer delà autant de comparaiſons entre les maſſes, les vîteſſes, les forces, que nous en avons faites dans les Théorêmes précédents entre les vîteſſes, les eſpaces, & les temps. On peut même faire une combinaiſon de rapports beaucoup plus étendue ; en ſubſtituant $\frac{e}{t}$ à la place de u dans la formule $f=mu$, on aura $f=\frac{me}{t}$, ou $ft=me$. *

61. THEOREME V. *On peut toujours ſuppoſer qu'un mouvement inégal quelconque, ſoit en ligne droite, ſoit en ligne courbe, eſt uniforme & rectiligne pendant un temps infiniment petit quelconque.*

DEM. Car de même que dans la Géométrie, les Eléments des courbes quelconques ſont des droites infiniment petites, de même dans la Méchanique on peut concevoir dans les mouvements inégaux quelconques, que les eſpaces finis ſont la ſomme d'une infinité d'eſpaces infiniment

* Il n'eſt pas néceſſaire de ſe charger la mémoire de ces ſortes de rapports, on a mis ici tous ceux du Théorême I. pour ſervir d'exemple, & principalement parce que nous aurons ſouvent beſoin de les citer : on les trouve au reſte très-aiſément de ſoi-même, en ſe rappellant le Principe d'où eſt tirée la formule. Car, par exemple: puiſqu'un eſpace eſt d'autant plus grand qu'un corps l'a parcouru avec plus de viteſſe dans un temps plus long, j'en conclus auſſi-tôt : donc les eſpaces ſont en raiſon compoſée des viteſſes & des temps. Et puiſque le temps d'un mouvement eſt d'autant plus long qu'il y a plus de chemin à faire avec moins de viteſſe : donc les temps ſont en raiſon compoſée de la directe des eſpaces & de l'inverſe des vîteſſes, &c.

Digitized by Google

petits, & par conſéquent rectilignes, parcourus chacun dans des temps infiniment petits, avec la vîteſſe que le mobile a reçue ou acquiſe. Or pendant la durée d'un inſtant infiniment petit, on ne peut concevoir d'inégalité dans la vîteſſe.

62. COROLLAIRE. Dans un mouvement inégal quelconque, on pourra eſtimer dans un temps infiniment petit, la vîteſſe, les forces, les eſpaces, &c. ſuivant tous les rapports précédents : comme ſi on exprime par du une vîteſſe infiniment petite, par de un eſpace infiniment petit, par dt un temps infiniment petit, &c. comme on a coutume de faire dans l'analyſe des infinis, on aura toujours, par les formules précédentes, les expreſſions des Eléments qui entrent dans les mouvements quelconques; & ſi on exprime par $\int$ la ſomme ou l'intégrale de ces quantités infiniment petites, on en repréſentera les effets finis. Par exemple, cette expreſſion $\int \frac{de}{u}$ exprime le temps qu'un corps employe à décrire par un mouvement quelconque un eſpace quelconque : $\int u\,dt$ repréſente un eſpace fini quelconque parcouru dans un temps quelconque, &c. Dans les différents cas, l'on trouve la valeur de ces expreſſions, ſuivant les regles du calcul intégral.

Du mouvement compoſé, abſolu & uniforme.

63. ON entend par mouvement compoſé celui qui eſt produit par l'effort réuni de pluſieurs cauſes qui agiſſent en même-temps ſur un même corps.

On connoît aſſez par expérience le mouvement compoſé. Un homme emporté par un vaiſſeau ne laiſſe pas d'y marcher librement en tout ſens : il y jette une pierre qui va frapper à un point déterminé du vaiſſeau, de même que ſi ce vaiſſeau étoit immobile; or il eſt évident 1°, que le mouvement abſolu de cet homme, eſt un mouvement compoſé de ſon mouvement propre & de celui du vaiſſeau. 2°, Que ces deux mouvements s'uniſſent, ou ſe détruiſent ſelon que leurs directions ſe trouvent dans le même ſens, ou dans un ſens oppoſé : car, par exemple, lorſque le vaiſſeau eſt emporté rapidement, ſi on jette une pierre avec force dans la même direction contre un plan en repos, tel que le pilier d'un pont, il eſt clair que ſans avoir égard

égard à la masse de la pierre, le coup que le pilier recevra sera d'autant plus grand que le vaisseau ira plus vîte, & que la pierre aura été jettée avec plus de force. Car si on n'avoit que présenté la pierre au pilier en la tenant dans la main, la vîtesse seule du vaisseau lui eût fait donner un coup à ce pilier. Au contraire, quand le vaisseau est passé au-delà du pont, si on jette contre ce pilier, la pierre avec la même force qu'auparavant, elle ne le frappera que foiblement, parce que le vaisseau allant dans un sens contraire à celui de la pierre, soustraira d'autant plus le pilier au choc de la pierre, qu'il ira plus vîte.

64. Enfin un corps qui est poussé vers un point du vaisseau, dans une direction oblique à la route du vaisseau n'arrive réellement à ce point, ni par la route absolue que suit le vaisseau, ni par la route absolue que ce corps suivroit si le vaisseau étoit immobile, mais par une direction moyenne entre ces deux routes. Par exemple, si du point A (fig. 8.) on veut rouler une boule B le long du bord A*n* du vaisseau A*n* H Q, pour aller toucher le point *n*, il est clair que si la ligne A*n* est égale à quatre fois la circonférence de la boule, cette boule ne fera que quatre tours depuis A jusqu'en *n*; soit appellé B le point de la circonférence de la boule qui touche le point A du vaisseau, il est évident que si le vaisseau étoit immobile, la boule en A poussée dans la direction A*n*, suivroit réellement la route A*n* par un mouvement absolu & uniforme, & que son point B seroit après le premier tour en *b*, après le second en *f*, après le troisieme en N, après le quatrieme il toucheroit le but *n*. Mais puisque nous supposons que le vaisseau se meut uniformément dans la direction A G; tandis que la boule fait un tour, le vaisseau avance, & ce tour étant achevé, le vaisseau est dans la position E C I R, & le but *n* est en C: donc le point B de la boule qui auroit dû être en *b*, est alors en *a*, en sorte qu'il s'est avancé vers l'autre côté de la quantité E*a* égale & parallele à B*b*: & comme le bord du vais-

ſeau eſt en EC, la boule ſe trouve encore le long du bord du vaiſſeau, ayant cependant décrit la ligne A*a*, qui n'eſt ni celle qu'elle auroit décrit ſi le vaiſſeau eût été immobile, ni celle que le vaiſſeau ſuit; mais qui eſt entre deux. On verra de même qu'à la fin du ſecond tour le vaiſſeau a la poſition DFKS, le but eſt en F, & le point B de la boule eſt en *d*: qu'à la fin du troiſieme tour, la poſition du vaiſſeau eſt MVOT, le but eſt en V, & le point B en L: qu'enfin après le quatrieme tour le vaiſſeau eſt en *ml*PG, & la boule B a rencontré le but en *l*, après avoir parcouru réellement la ligne A*l* qui n'eſt ni celle du vaiſſeau, ni celle qu'elle auroit décrite, ſi le vaiſſeau eût reſté immobile, mais qui tient un certain milieu entre deux.

Or on peut regarder le mouvement de la boule le long de A*l* comme l'effet compoſé d'une force qui la pouſſe de A en *n*, dans le même temps qu'une autre force pouſſe ſon centre de A en *m*, parce que ces deux actions ont réellement lieu dans cet Exemple.

65. Il eſt donc certain par expérience, qu'un corps peut ſe mouvoir en vertu de différentes forces qui agiſſent en différents ſens.

66. THEOREME I. *Si deux puiſſances agiſſent en même temps ſur un même corps ſuivant des directions qui ſont dans une même ligne droite, & ſi ces directions ſont dans le même ſens; le corps ſe meut uniformément avec une vîteſſe égale à la ſomme des vîteſſes qu'il eût eues ſi les puiſſances euſſent agi ſéparément, & dans la même direction. Mais ſi les directions des forces ſont en ſens contraire, le corps ſe meut uniformément ſuivant la direction de la puiſſance plus forte, & avec une vîteſſe égale à la différence des vîteſſes qu'il eût eues, ſi ces puiſſances euſſent agi ſéparément.*

Tout cela eſt évident par ce qui a été dit ci-deſſus (63). Dans le premier cas, les deux forces équivalent à une ſeule, qui étant égale à la ſomme des deux, fait en un inſtant un ſeul effort contre le corps. Et dans le ſecond cas, la plus petite force eſt totalement détruite par une égale quantité

Digitized by Google

de force qui eſt auſſi détruite dans la plus grande, en ſorte qu'il ne lui reſte plus que ſon excès de force, qui produit lui ſeul le mouvement; & par conſéquent le corps ne ſe meut que dans la direction de la plus grande force avec une vîteſſe proportionnée à ſon excès ſur l'autre.

67. COROLLAIRE. *Si dans le ſecond cas les forces oppoſées étoient égales, le corps reſteroit en repos.*

68. THEOREME II. *Si deux puiſſances* P, *p*, (fig. 1) *agiſſent en même-temps ſur un corps* C, *ſuivant des directions* PC, *p*C, *qui font un angle quelconque, avec des efforts repréſentés par les longueurs des droites* PC, *p*C; *elles lui feront décrire uniformément une Diagonale* CB *d'un Parallélogramme* AD (*formé par les directions* PC, *p*C *prolongées en* CA, CD) *dans le même temps que la puiſſance* P *agiſſant ſeule, lui auroit fait décrire uniformément la ligne* CD, *& que la puiſſance* p *agiſſant ſeule, lui auroit fait décrire uniformément la ligne* CA.

DEM. Il eſt clair (65) que la puiſſance *p*C agiſſant dans la direction CA, parallele à DB, n'empêche pas que la puiſſance PC n'agiſſe en même-temps ſuivant CD, pour pouſſer le corps C vers cette parallele BD, afin qu'il y arrive dans un temps donné: que par conſéquent dans ce temps le corps approchera de BD en vertu de l'effort de la puiſſance PC, ſoit qu'on lui imprime en même temps une force ſuivant CA, ſoit qu'on ne la lui imprime pas: & qu'ainſi à la fin de ce temps, il ſe trouvera quelque part dans cette ligne BD. De même le corps C en vertu de la force *p*C arrivera à la fin du même temps quelque part dans la ligne AB parallele à CD. Donc à la fin de ce temps le corps ſe trouvera dans le concours B de ces deux lignes DB, AB paralleles à CA, CD; donc il ſe trouvera dans la Diagonale du Parallélogramme CDBA.

69. COROLLAIRE I. Puiſque les puiſſances *p*, P, ſont ſuppoſées telles qu'en agiſſant ſéparément, l'une auroit pouſſé le corps de C en D, tandis que l'autre l'auroit pouſſé de C en A, il eſt clair (60) que P : *p* :: CD : CA.

70. COROLLAIRE II. Puiſque C eſt un même corps pouſſé par les deux forces P, *p*, & que les eſpaces CD, CA ſont parcourus en même-temps, en vertu de ces forces, il ſuit que CD, CA repréſentent les vîteſſes auſſi-bien que les eſpaces qui conviennent aux puiſſances P, *p*.

71. COROLLAIRE III. *Si avec les directions des forces* pC, PC *on fait le Parallelogramme* PC*p*F, *la Diagonale* CB *prolongée de ce côté-là en* CF, *en ſera auſſi la Diagonale.* Car puiſque P : *p* :: PC : *p*C ou FP :: CD : CA ou BD, & que l'angle FPC eſt égal à ſon alterne CDB; il ſuit (Elem. 559) que les triangles FPC, CDB ſont ſemblables; donc l'angle PCF = BCD; or ces deux angles étant oppoſés au ſommet & formés en partie par une même ligne droite PD, il faut qu'ils ſoient encore formés par l'interſection d'une même ligne droite comme BF, & que par conſéquent les parties BC, CF ſoient en ligne droite.

72. COROLLAIRE IV. Donc *la Diagonale* FC *repréſente une puiſſance capable de pouſſer ſeule le corps de* C *en* B, *dans le même temps que la puiſſance* P *l'auroit pouſſé en* D, *& la puiſſance* p *en* A. Car puiſque (69) les forces de P & de *p* ſont comme les eſpaces CD, CA; à cauſe des triangles ſemblables FPC, CDB, la force qui auroit pouſſé ſeule le corps de C en B, eſt auſſi comme l'eſpace CB.

73. COROLLAIRE V. Donc la force ſeule repréſentée par FC a le même effet que les deux forces P, *p* agiſſantes enſemble ſur C: & par conſéquent, *on peut ſubſtituer la ſeule force* FC *aux deux forces unies* PC, *p*C; & réciproquement, *à la force ſeule* FC *on peut ſubſtituer deux autres forces quelconques, comme* PC, *p*C, *pourvu qu'elles ſoient telles, que les eſpaces* CD, CA, *que chacune agiſſant ſéparément auroit fait décrire en même-temps au corps* C, *puiſſent être les côtés d'un Parallélogramme, dont l'eſpace* CB *parcouru en même-temps en vertu de la ſeule force* FC, *puiſſe être la Diagonale.*

74. Une force FC conſidérée comme réſultante des

Digitized by Google

efforts réunis P C, *p* C, s'appelle une *force composée* des forces P C, *p* C. Et quand à une force seule F C on substitue deux autres équivalentes P C, *p* C, on dit que cette force F C est *décomposée* en deux forces qui sont P C & *p* C.

75. COROLLAIRE VI. *La somme de deux forces réunies pour en composer une, est toujours plus grande que la force composée; & réciproquement une force composée est plus petite que la somme des forces dans lesquelles on la décompose*, comme il est évident, parce que la base C B, qui représente la force composée, doit être plus petite que la somme des côtés C D, B D ou C A (Elem. 494). Ce qui fait qu'on peut substituer la seule force F C aux deux *p* C, P C, ce n'est pas que celle-là soit égale aux deux autres, mais c'est qu'elle y produit le même effet, comme on verra bientôt (85).

76. COROLLAIRE VII. *Une force* F C *composée des deux* P C, *p* C, *produit un mouvement qui est dans le plan qui passe par les directions des deux forces composantes* P C, *p* C: parce qu'une Diagonale est nécessairement dans le plan de son Parallélogramme.

77. COROLLAIRE VIII. *Un corps mû par une force composée, suit une direction qui participe, autant qu'il est possible, de la direction des forces composantes.*

78. COROLLAIRE IX. *Un corps poussé par plusieurs puissances à la fois en plusieurs directions différentes dans un même plan, se meut uniformément, comme s'il n'étoit poussé que par une seule force équivalente à tous les efforts réunis de toutes ces puissances, & qui participe, autant qu'il est possible, de la direction de chacune.* Par exemple, si quatre forces poussent ensemble un corps C, (fig. 5) ensorte qu'en un même temps la premiere soit capable de lui faire parcourir C D, la seconde C A, la troisieme C E, la quatrieme C G, le corps se mouvra uniformément suivant C H, direction qui participe, autant qu'il est possible, des quatre C D, C A, C E, C G; sa vîtesse & sa force sont représentées par C H, qui participe, autant qu'il est possible, des vîtesses & des forces représentées par C D, C A, C E, C G. Pour

trouver cette ligne CH, il faut conſtruire avec CD & CA le Parallélogramme AD, dont la Diagonale CB repréſente les efforts CD, CA réunis. Enſuite regardant CB comme une ſeule force, conſtruiſez avec CB & CE un Parallélogramme EB; ſa Diagonale CF repréſentera les efforts réunis de CE & de CB, c'eſt-à-dire, des trois premieres forces: enfin conſtruiſez avec CF & CG un Parallélogramme GF dont la Diagonale CH repréſentera (73) l'effet des quatre efforts réunis. En effet, ſi au lieu de commencer par le Parallélogramme ſur CD & CA, on commence par en faire un avec CG, CE, il donnera la Diagonale CK, avec laquelle & avec CA faiſant le Parallélogramme CKIA, on aura la Diagonale CI, avec laquelle & avec CD, on fera le Parallélogramme CIHD, qui donnera la même Diagonale CH. On pourra la trouver encore en faiſant les Parallélogrammes AD, GE, KB.

79. Ayant conſtruit une figure qui repréſente la poſition de toutes ces Diagonales, on peut trouver par la Trigonométrie le rapport & la direction de la force réſultante CH. Soient les angles DCA 56°, ACE 45°, ECG 28°, les forces ou les eſpaces qui leur ſont proportionnels, CD = 10, CA = 13, CE = 14, CG = 8. 1°, Dans le triangle CDB on connoît les côtés CD = 10, DB = CA = 13 & l'angle CDB de 124°, parce qu'il eſt ſupplément de l'angle donné DCA. Donc ſuivant les regles de la Trigonométrie (Elem. 751), l'angle BCD eſt de 31° 58′ & CB de 20, 36. Retranchant 31° 58′ de 56°, reſtent 24° 2′ pour la valeur de l'angle BCA, auquel ajoutant l'angle ACE de 45°, la ſomme 69° 2′ ſera l'angle BCE. Or à cauſe du Parallélogramme BCEF, dans le triangle BCF, on connoît BC = 20, 36, BF = CE = 14, & l'angle CBF (ſupplément de BCE) de 110° 58′. Donc par un ſemblable calcul l'angle BCF ſera de 27° 16′, & le côté CF de 28, 54. Enfin ajoutant enſemble DCA 56°, ACE 45°, ECG 28°, & de la ſomme 129°, ôtant DCB

Digitized by Google

31° 58′, enſuite BCF 27° 16′, reſte FCG 69° 46′, & dans le triangle FCH, à cauſe du Parallélogramme FCGH, on connoît CF = 28, 54, FH = CG = 8, & l'angle compris 110° 14′. Donc par un calcul ſemblable, on aura FCH 13° 29′ & CH = 32, 19. Donc ſi à DCF 59° 14′ on ajoute 13° 29′, on aura 72° 43′, angle DCH de la route du mobile avec la premiere direction CD : & l'eſpace qu'il parcourt eſt à l'eſpace CD, comme 32, 19 à 10.

80. COROLL. X. *Il ſuit delà que quel que ſoit le nombre des forces qui agiſſent en même-temps ſur un même corps, on peut les réduire à trois, à deux, à une, ou à tel nombre qu'on voudra; & réciproquement, qu'il n'y a pas de force qu'on ne puiſſe décompoſer en tel nombre d'autres qu'on voudra, pourvu qu'elles ſoient toujours des côtés de parallélogrammes, dont la décompoſée ſoit une Diagonale.*

81. COROLL. XI. A cauſe de PC (fig. 1.) parallele & egale à F*p*, ou de *p*C parallele & égale à FP, il eſt clair qu'on peut regarder les trois côtés du triangle FPC, ou ceux du triangle F*p*C comme repréſentants les deux forces compoſantes & la compoſée. *On peut donc, au lieu de parallélogrammes, ſe ſervir de triangles, pour exprimer la compoſition & la décompoſition des forces.*

82. PROBLEME I. *Subſtituer à une force donnée* F, *deux forces* P, p *qui produiſent le même effet.*

Ce Problême a deux cas. Car ou les directions de ces forces P, *p* ſont données de poſition, ou ces forces ſont exprimées par des lignes données de grandeur.

SOLUTION du premier cas. Que la droite FC (fig. 1.) exprime la force donnée F, faites au point C un angle *p*CP égal à l'angle que font entr'elles les directions données, enſorte cependant que FC ſoit compriſe dans cet angle : par le point F menez les paralleles F*p*, FP aux côtés PC, *p*C de l'angle qu'on vient de faire, & par ce moyen on aura un Parallélogramme P*p*, dont les côtés PC, *p*C repréſenteront les forces demandées.

DEM. Prolongez indéfiniment *p*C, PC, FC, & ayant

Digitized by Google

pris sur celle-ci un point B à volonté, faites le Parallélogramme AD. Maintenant puisque PF est parallele à pA, & BD à pA, FP & BD sont paralleles, & les angles alternes FPC, CDB sont égaux : par la même raison l'angle alterne PFC=CBD, donc les triangles PCF, BCD sont semblables : donc FC : CB :: FP ou pC : BD ou CA :: PC : CD. Mais FC, qui est l'un des antécédents représente une force ; donc les autres antécédents pC, PC représentent aussi des forces. De même CB conséquent de la premiere raison représente un espace que la force donnée FC fait parcourir en un certain temps ; donc les autres conséquents CA, CD représentent les espaces que les forces pC, PC peuvent faire parcourir : mais parce que les espaces CB, CA, CD sont proportionnels aux forces FC, pC, PC, ils pourront être parcourus dans le même temps (60) : Donc la force F pousséra le corps C en B dans le même temps que la force p le pousseroit en A, & la force P en D : Donc les forces p, P agissant conjointement, produisent le même effet que la seule force donnée F, & par conséquent on peut les lui substituer (73).

83. SOLUTION *du second cas*, dans lequel on suppose que les forces requises soient représentées par des lignes données de grandeur, comme pC, & pF. Il est nécessaire que leur somme soit plus grande que la force donnée FC (75), afin que le problême soit possible.

Formez un triangle FpC des trois lignes données FC, pF, pC, & menez CP parallele à pF, & FP parallele à pC : vous aurez un Parallélogramme dont les côtés pC, PC déterminent la direction des forces cherchées, comme il est évident.

84. COROLL. Il est maintenant facile d'expliquer comment les forces pC, PC, (fig. 2) dont la somme excede la résultante FC, n'ont cependant pas plus d'effet par leur action réunie, pour pousser de C en B, le corps qu'elles animent, que la seule force FC. Car si des points p, P, on mene sur FC les perpendiculaires pS, PT, & si on

Digitized by Google

acheve les Parallélogrammes HS, TK, on connoîtra par tout ce qui a été dit jusqu'ici, que la force pC peut être décomposée en deux forces pH, pS, qui animant à la fois le corps C, sont capables de produire le même effet que la force pC: de même la force PC peut être décomposée en PK, PT. Or le corps C étant toujours animé de ces quatre forces pendant tout son mouvement; en vertu de celles qui sont représentées par PT, pS, ou par leurs égales HC, KC perpendiculaires à la ligne FB, opposées directement, & égales entr'elles (car pS, PT sont deux perpendiculaires menées du sommet des deux triangles égaux FCP, FCp sur leur base commune FC), il ne peut s'approcher ni s'éloigner de FB; mais il doit rester dans cette ligne. Reste donc qu'il n'y ait que les forces pH, PK, ou leurs égales SC, TC qui poussent le corps C vers B: Mais TC = FS, (parce que les segments FT, TC de la base FC doivent être égaux aux segments FS, SC). Donc FS, SC représentent les véritables efforts des puissances P, p sur le corps C pour le pousser de C en B. Or il est clair que la somme de ces efforts est égale à l'effort seul de la force FC: donc quoique la somme des forces PC, pC soit plus grande que la force FC, ces deux forces en agissant à la fois, ne doivent cependant pas avoir plus d'effet que cette seule force FC.

85. Remarque I. C'est l'obliquité de la direction de ces forces l'une à l'égard de l'autre, qui détruit dans chacune une partie égale de leur effet absolu pour pousser le corps de C vers B, & cette partie est d'autant plus grande, que l'angle de ces directions est plus grand & au contraire. Car si l'angle étoit infiniment grand, ces directions seroient opposées entr'elles, la plus petite force seroit totalement détruite par une partie égale de la plus grande, & le corps iroit suivant la direction de cette plus grande force avec une vîtesse proportionnée à son excès sur la plus petite suivant le second cas du Théorême I. (66). Et si l'angle des directions étoit infiniment aigu, elles concourroient toutes deux à pousser le corps suivant leur direction com-

Digitized by Google

mune, & avec une vîteſſe proportionnée à la ſomme des forces, ſuivant le I. cas du même Théorême.

86. Les droites P C, *p* C repréſentent les *forces abſolues* des puiſſances P, *p* & les droites T C, S C qui expriment la quantité réelle de leurs efforts ſur le corps C, pour le pouſſer de C en B, repréſentent les *forces relatives* des puiſſances P, *p*. D'où on peut conclure : *Que les puiſſances ne produiſent d'effet que par leurs forces relatives & dans la direction de ces mêmes forces relatives.*

87. REM. II. Toute cette Théorie de la compoſition & de la décompoſition des forces peut être déduite de ce principe: *Deux forces qui agiſſent à la fois ſur un corps dans des directions obliques l'une à l'autre, ne peuvent mettre ce corps en mouvement, que ce que ces forces ont d'oppoſition, à cauſe de l'obliquité de leurs directions, ne ſoit entiérement détruit, & alors le corps n'eſt mû qu'en vertu de la ſomme des deux reſtes de force après cette deſtruction.* Si donc ces forces & leurs directions ſont repréſentées par des droites données de longueur & de poſition, 1°, Ce qu'il y a d'oppoſé dans ces deux directions doit être totalement détruit. Or deux choſes oppoſées ne ſe peuvent totalement détruire réciproquement, qu'elles ne ſoient égales : donc ce qu'il y a d'oppoſé dans les deux directions doit être repréſenté par deux droites égales aboutiſſantes en ſens directement contraires. 2°, Ce qui reſte après cette deſtruction doit être repréſenté par une droite égale à la ſomme de chacun des deux reſtes, & qui n'ait aucune obliquité à l'égard des directions détruites : elle doit donc être perpendiculaire à ces directions détruites.

88. Cela poſé, que *p* C, P C (fig. 2.) repréſentent les deux forces qui agiſſent ſur le corps C. Ayant joint *p* P, & fait paſſer par ſon milieu I une droite indéfinie C F, ſi on y abaiſſe les perpendiculaires *p* S, P T, elles ſeront égales entr'elles, à cauſe des deux triangles rectangles *p* I S, P I T qui ſont égaux, puiſque I P = I *p*, & T P parallele à *p* S. Si enſuite par C on mene K H perpendiculaire à F C, puis par *p*, P les paralleles P K, *p* H, il eſt clair que les droites K C, H C étant égales, & venant

aboutir l'une à l'autre en ſens oppoſé, doivent repréſenter ce que les directions obliques PC, *p*C ont d'oppoſition; & que TC, SC ou leurs égales PK, *p*H perpendiculaires à KH expriment ce qui reſte après la deſtruction de l'oppoſition. Donc le corps C ne doit ſe mouvoir que dans la direction TC ou SC avec une force repréſentée par la ſomme TC+SC. Donc pour avoir une droite égale à cette ſomme, il faut porter TC de S en F, afin d'avoir CF=SC+TC, & qu'ainſi FC repréſente la ſomme des deux reſtes de forces, en vertu de laquelle le corps eſt mu.

Maintenant puiſque SF=FT+TS, & CT=CS+ST, il ſuit que FT=CS; or dans les triangles égaux *p*SI, PTI on a IT=IS; donc FI=IC. Donc ſi on joint *p*F, PF, les triangles F*p*I, CIP ont les côtés *p*I=IP, IF=IC & l'angle compris égal. Donc (Elem. 508.) ils ſont égaux: donc l'angle *p*FC=FCP: Donc *p*F eſt parallele à CP. On démontre de même que PF eſt parallele à *p*C. Donc le quadrilatere *p*FPC eſt un Parallélogramme dont FC eſt la Diagonale. Donc la force réſultante des deux forces obliques *p*C, PC, eſt exprimée par la Diagonale FC.

89. PROBLEME II. *Trois puiſſances concourant en un point par des directions qui ne ſoient pas dans un même plan, trouver la direction & l'expreſſion d'une ſeule force compoſée équivalente.*

SOLUT. Soient PC, QC, *p*C (fig. 4.) les directions de trois puiſſances qui agiſſent à la fois ſur un point C, & qui ſont ſituées en différents plans. Puiſque deux droites qui ſe rencontrent ſont (Elem. 626) dans un même plan: il eſt clair 1°, qu'en tirant PD parallele à *p*C, & *p*D parallele à PC, on forme un Parallélogramme *p*DPC dans le plan duquel les puiſſances PC, *p*C exercent leurs forces. On aura de même le Parallélogramme CPAQ pour le plan commun des forces PC, QC, & le Parallélogramme CQE*p* pour le plan commun des forces QC, *p*C; de ſorte qu'en menant EB parallele à *p*D, & DB parallele à *p*E, puis joignant AB, on forme un parallélopipede. 2°, Que deux des forces quelconques comme PC, QC ſe

Digitized by Google

peuvent réduire à une seule exprimée par AC, laquelle est dans un des deux plans diagonaux du parallélopipede, & qu'enfin la force composée des forces AC, pC est représentée par la position & par la longueur de BC, qui est une diagonale du parallélopipede.

On pourra raisonner à peu près de la même maniere sur tant de puissances qu'on voudra, qui agissent dans des plans différents sur un même mobile.

Du mouvement rectiligne uniformément accéléré, ou de la chûte libre des corps, & de leurs mouvements sur des plans inclinés.

90. UN corps se meut uniformément quand il n'a reçu d'impulsion que dans le premier instant de son mouvement; & si dans le cours de son mouvement il vient à en recevoir une nouvelle dans le même sens, sa vîtesse augmente dans l'instant, puis il continue d'aller uniformément avec cette nouvelle vîtesse. Mais s'il reçoit à chaque instant une nouvelle impulsion, sa vîtesse s'accélere de plus en plus, & si cette nouvelle impulsion est toujours égale & se fait en temps égaux, sa vîtesse s'accélere uniformément, & son mouvement est dit *uniformément accéléré.*

91. La force qui donne au corps à chaque instant une nouvelle impulsion s'appelle *force accélératrice*: & si à chaque instant égal cette impulsion est égale, la force qui la donne s'appelle *force accélératrice constante.*

92. Par une raison contraire, si un corps qui avoit d'abord une certaine vîtesse, vient à en perdre des parties égales à chaque instant égal, par autant d'impulsions égales dans un sens opposé directement à celui de son mouvement, ce mouvement devient uniformément retardé.

93. Ces deux mouvements ont précisément les mêmes propriétés en sens contraire, & ce qu'on dit de l'un doit s'entendre de l'autre, de la même maniere que ce qu'on dit d'une progression croissante, doit s'appliquer à une décroissante.

Digitized by Google

94. Le mouvement uniformément accéléré eſt une ſuite de mouvement uniforme en progreſſion Arithmétique croiſſante. Dans un temps fini cette progreſſion eſt finie ſi chaque degré de vîteſſe ne s'acquiert qu'au commencement de chaque inſtant fini, comme de minute en minute, ou de ſeconde en ſeconde, & alors l'accélération ſe fait par ſauts: mais la progreſſion eſt infinie, ſi les degrés de vîteſſe s'acquierent à chaque inſtant infiniment petit. C'eſt de cette derniere eſpece dont nous allons parler, parce qu'elle eſt la plus ordinaire.

95. THEOR. I. *Dans le mouvement uniformément accéléré, le nombre des degrés de vîteſſe acquis à chaque inſtant eſt comme le nombre de ces inſtants;* & par conſéquent *les vîteſſes acquiſes & les temps ſont depuis le commencement du mouvement, comme la ſuite naturelle* 1, 2, 3, 4, 5, &c. C'eſt une ſuite évidente de la notion du mouvement uniformément accéléré.

96. THEOR. II. *Dans le mouvement uniformément accéléré, l'eſpace* e *parcouru pendant un certain temps fini* t, *compté depuis le commencement du mouvement, n'eſt que la moitié de l'eſpace que parcourroit uniformément dans le même temps* t, *un corps qui auroit une vîteſſe* u *égale à celle qui ſe trouve acquiſe par l'accélération, à la fin du temps* t. Ou bien, *la formule de l'eſpace, eſt dans le mouvement uniformément accéléré,* $e = \frac{ut}{2}$, *au lieu que dans le mouvement uniforme* $e = ut$ (49).

DEM. Partagez le temps t en une infinité d'inſtants égaux, & puiſque u exprime la vîteſſe acquiſe à la fin du temps t, les degrés de vîteſſe pendant chacun de ces inſtants ſeront exprimés (94) par cette progreſſion Arithmétique $\frac{\cdot}{\cdot}. \frac{1u}{\infty}. \frac{2u}{\infty}. \frac{3u}{\infty}. \frac{4u}{\infty}$..... dont le dernier terme eſt $\frac{\infty u}{\infty} = u$. Or (61) pendant chaque inſtant égal & infiniment petit, le mouvement étant uniforme, chaque eſpace parcouru eſt (51) comme la vîteſſe. Donc chaque terme de cette progreſſion eſt proportionnel à chaque eſpace parcouru pendant chaque inſtant, & la ſomme de tous ces termes, repréſente l'eſpace total e parcouru pen-

Digitized by Google

dant la durée t du mouvement. Mais (Elem. 280) la ſomme des termes de cette progreſſion eſt égale au produit de la ſomme $\frac{tu}{\infty}+u$ des extrêmes, multipliée par la moitié du nombre des termes, c'eſt-à-dire, par la moitié du nombre des inſtants, ou par $\frac{t}{2}$. Donc $e=\left(\frac{u}{\infty}+u\right)\times\frac{t}{2}$ $=\frac{ut}{2\infty}+\frac{ut}{2}$. Donc, à cauſe du terme infiniment petit $\frac{ut}{2\infty}$, on a $e=\frac{ut}{2}$.

97. COROLL. I. *Dans un mouvement uniformément accéléré les eſpaces parcourus en des intervalles de temps finis égaux & conſécutifs, comme de ſeconde en ſeconde, ſont entr'eux, depuis le commencement du mouvement, comme les termes de la ſuite naturelle des nombres impairs*, 1, 3, 5, 7, 9, &c.

Car pendant la durée de chaque intervalle t de temps, les eſpaces ſont parcourus en vertu & des degrés de vîteſſe qui ſe trouvent acquis au commencement de chaque intervalle, & de celui qui s'acquiert pendant cet intervalle. Or (95) les vîteſſes acquiſes au commencement de chaque intervalle conſécutif ſont, $0u$, $1u$, $2u$, $3u$, $4u$, &c. Donc les eſpaces parcourus en vertu de ces vîteſſes, ſont (49) $0tu$, $1tu$, $2tu$, $3tu$, $4tu$, &c. & les eſpaces parcourus en vertu du nouveau degré de vîteſſe u qui s'acquiert pendant chaque intervalle t, eſt $\frac{tu}{2}$ (96). Donc les eſpaces entiers parcourus pendant chaque intervalle t en vertu, & des vîteſſes acquiſes, & de celles qui s'acquierent, ſont, $0tu+\frac{tu}{2}$, $1tu+\frac{tu}{2}$, $2tu+\frac{tu}{2}$, $3tu+\frac{tu}{2}$, $4tu+\frac{tu}{2}$, &c. ou bien $\frac{1tu}{2}$, $\frac{3tu}{2}$, $\frac{5tu}{2}$, $\frac{7tu}{2}$, $\frac{9tu}{2}$, &c. Or il eſt clair (14) que tous ces termes ſont entr'eux comme la ſuite 1, 3, 5, 7, 9, &c.

98. COROLL. II. *Dans un mouvement uniformément accéléré les eſpaces comptés depuis le commencement du mouvement juſqu'à la fin de chacun des intervalles égaux de temps, ſont entr'eux comme la ſuite naturelle des quarrés* 1, 4, 9, 16, 25, &c.

Digitized by Google

Car depuis le commencement du mouvement juſqu'à la fin du premier intervalle de temps, l'eſpace eſt 1, juſqu'à la fin du ſecond l'eſpace total eſt $1+3=4$; juſqu'à la fin du troiſieme, c'eſt $1+3+5=9$; juſqu'à la fin du quatrieme, c'eſt $1+3+5+7=16$; juſqu'à la fin du cinquieme, l'eſpace total eſt $1+3+5+7+9=25$, &c.

99. COROLL. III. *Dans un mouvement uniformément accéléré, les eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement, juſqu'à la fin de chacun des intervalles égaux de temps, ſont entr'eux comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des vîteſſes acquiſes, de ſorte qu'on peut faire* $e=tt$, *ou* $e=uu$.

Car la ſuite naturelle des nombres 1, 2, 3, 4, 5, &c. exprime les temps ou les degrés de vîteſſes acquiſes (95) & la ſuite des quarrés conſécutifs 1, 4, 9, 16, 25 &c. exprime les eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement juſqu'à la fin des temps correſpondants.

100. REMARQUE I. On voit à l'œil que les corps peſants tombent par un mouvement accéléré, & qu'étant pouſſés de bas en haut, ils s'élevent avec un mouvement retardé. L'expérience a fait connoître que ces mouvements ſont uniformément accélérés & retardés: Galilée eſt l'Auteur de cette découverte, & de toute la Théorie du mouvement uniformément accéléré. Toutes les expériences qui ont été faites depuis, l'ont tellement confirmée, qu'il ne ſeroit pas raiſonnable de la révoquer en doute, ni de faire d'autres ſuppoſitions pour expliquer les Phénomenes de la peſanteur.

101. Il faut donc concevoir la peſanteur (quelle qu'en ſoit la cauſe), comme une force accélératrice conſtante, qui à chaque inſtant donne à chaque molécule, un particule de matiere qui compoſe un corps, un coup dirigé au centre de la terre. Un plan qui ſupporte un corps, ou une main qui le retient en l'air, ſoutient tous ces efforts de la peſanteur, dont la ſomme s'appelle *le poids* du corps: ſi donc on ne ſoutient plus ce corps, le coup que la peſanteur donne à tout moment à chacune de ſes molécules n'étant plus repouſſé, le corps commence à tomber avec un degré de vîteſſe: dans l'inſtant ſuivant, la peſanteur

Digitized by Google

donne un autre coup, & l'effet de ce second coup se joint à celui du premier coup, lequel subsiste toujours par l'inertie de la matiere, de sorte que le corps acquiert par ce moyen deux degrés de vîtesse. Au troisieme instant la pesanteur donne encore un coup, qui joint aux deux précédents, fait qu'à la fin de cet instant, le corps a trois degrés de vîtesse, & ainsi de suite.

102. Mais si on pousse un corps perpendiculairement de bas en haut, ce corps reçoit dans le premier instant qu'il se trouve libre, un coup dirigé vers la terre; ce coup lui fait perdre un petit degré de la vîtesse qu'on lui avoit donnée: au second instant, il reçoit un second coup qui lui fait perdre un second degré de vîtesse: au troisieme instant, il en perd encore un par un nouveau coup, & ainsi de suite.

103. Il suit de tout cela, 1°, *Que la force qu'un corps pesant a acquise en tombant, est égale à celle qui peut le faire remonter à la même hauteur d'où il est descendu.*

104. II°, *Que la force qui pousse un corps de bas en haut, le pousseroit à une hauteur double, si son mouvement n'étoit pas retardé par la pesanteur* (96).

105. III°, *Que la pesanteur des corps, ou leur poids, est proportionnelle à leur masse*: c'est une propriété qui a été d'ailleurs constatée par une infinité d'expériences, & sur-tout par celles de M. Newton.

106. IV°, Donc *quelle que soit la figure d'un corps qui a une certaine masse, son poids doit être toujours le même.*

107. V°, *Que les corps les plus denses, doivent être les plus pesants, toutes choses d'ailleurs égales.*

108. REMARQUE II. Il faut bien observer que tout ce qui vient d'être dit sur la pesanteur, doit s'entendre des corps à qui l'air fait une résistance insensible, ou plus rigoureusement, cela n'est exact qu'à l'égard des corps qui sont dans un espace parfaitement vuide d'air. Ainsi une balle de plomb, par exemple, qui a peu de surface en comparaison de son poids, suivra à très-peu près ces regles; mais si on en faisoit une boule creuse d'un grand diametre, alors l'air résisteroit d'autant plus à son mouvement,

Digitized by Google

vement ; qu'elle auroit plus de ſurface : de ſorte qu'il ſe pourroit faire que cette boule creuſe fût ſi groſſe, & l'épaiſſeur du plomb ſi petite, qu'elle ſe tiendroit dans l'air, en voltigeant ſans tomber, à peu-près comme un brin de duvet. Car on démontre par expérience que c'eſt l'air ſeul qui réſiſte à la chûte des corps, & qui en retarde la vîteſſe, ſoit en montant, ſoit en deſcendant : Par exemple, ſi on ſuſpend au ſommet d'un long récipient de Machine Pneumatique, un corps extrêmement peſant, comme de l'or, & un corps extrêmement léger comme un bout de plume, après qu'on en a pompé l'air, ces corps tombent avec une égale vîteſſe.

109. A l'égard des corps à qui l'air fait peu de réſiſtance, on a trouvé par expérience, & nous en ferons le calcul dans la ſuite d'après M. Huygens, qu'ils tombent de 15,1 pieds à très-peu près dans la premiere ſeconde de leur chûte. D'où il ſuit *que les eſpaces parcourus de ſeconde en ſeconde de temps par un corps qui tombe, doivent être exprimés par cette ſuite* 1×15,1. 3×15,1. 5×15,1. 7×15,1 &c. Et qu'ainſi pour ſçavoir tout d'un coup l'eſpace qu'un corps parcourt pendant une ſeconde déterminée dans le temps de ſa chûte, il faut multiplier par 15,1 le double du quantieme de la ſeconde moins 1. Ainſi pour avoir l'eſpace parcouru pendant la quatrieme ſeconde de la chûte, il faut multiplier 15,1 par 8 — 1 ; c'eſt-à-dire, par 7, & le produit 105,7 pieds ſera l'eſpace demandé.

110. Pour ſçavoir en combien de temps un corps tombera d'une hauteur donnée comme de 540 pieds, il faut faire comme 15,1 pieds à 540 pieds : ainſi 1 quarré de la premiere ſeconde eſt à 36 environ quarré de la derniere ſeconde : dont la racine 6 fait voir que le corps tombera en 6 ſecondes de temps.

111. En renverſant cette Analogie, on trouvera de quelle hauteur il doit tomber dans un temps donné.

112. REMARQUE III. On verra dans la ſuite que la peſanteur n'eſt pas par-tout la même ; mais qu'elle varie en raiſon inverſe des quarrés des diſtances au centre de la

Digitized by Google

terre. Ainſi un corps qui ſeroit éloigné du centre de la terre d'un diametre entier, ou de 3000 lieues ne tomberoit que de 3 pieds $\frac{3}{4}$ dans la premiere ſeconde de ſa chûte. Cependant la peſanteur eſt ſenſiblement conſtante dans un petit intervalle, comme de 1000 ou 1200 toiſes au-deſſus de la ſurface de la terre.

Formules pour le Mouvement uniformément accéléré.

113. Des deux Théorêmes précédents on peut déduire les douze formules ſuivantes, qui expriment les rapports que peuvent avoir entr'elles les forces accélératrices conſtantes p, les vîteſſes u acquiſes à la fin d'un inſtant quelconque, les eſpaces e parcourus depuis le commencement du mouvement, & les temps t employés à les parcourir.

$$p=\frac{e}{tt} \qquad u=2pt \qquad e=\tfrac{1}{2}ut \qquad t=\frac{2e}{u}$$

$$p=\frac{uu}{4e} \qquad u=\frac{2e}{t} \qquad e=ptt \qquad t=\sqrt{\frac{e}{p}}$$

$$p=\frac{u}{2t} \qquad u=2\sqrt{ep} \qquad e=\frac{uu}{4p} \qquad t=\frac{u}{2p}.$$

Les formules où la quantité p n'entre pas, ſont tirées du ſecond Théorême, ſuivant lequel la vîteſſe u eſt capable de faire un double effet dans un mouvement uniforme; ainſi $u=\frac{e}{t}\times 2$ ou $u=\frac{2e}{t}$. On a les autres par de ſimples ſubſtitutions.

Les formules où p entre, ſont fondées ſur ce que les eſpaces croiſſent, & comme les quarrés de temps (99), & comme la quantité de la force accélératrice p. Donc (16) $e=ptt$.

Suivant les expériences que nous avons citées (109), la valeur de p ſur la ſurface de la terre & dans la chûte libre des corps, eſt de 15, 1 pieds quand celle de t eſt exprimée en ſecondes.

114. THEOREME III. *Si un corps* C (fig. 6) *deſcend librement le long d'un plan incliné* AD; 1°. *Son mouvement*

Digitized by Google

eſt uniformément accéléré. 2°. *Sa vîteſſe acquiſe depuis ſon départ en* A *juſqu'à ſon arrivée en* D, *eſt à celle qu'il auroit acquiſe en même temps en tombant librement, comme la hauteur* AB *du plan incliné eſt à ſa longueur* AD.

DEM. 1°. Le corps C étant ſur un point quelconque F, tirez de ſon centre C une perpendiculaire CG à la baſe DB du plan incliné ou à l'horiſon : cette ligne repréſentera la force abſolue de la peſanteur qui pouſſe le corps C vers le centre de la Terre. Si on la décompoſe en deux, dont l'une CF ſoit perpendiculaire au plan incliné, & l'autre CH parallele à ce plan, la ligne CF repréſentera une partie de la peſanteur qui eſt détruite par le plan qui ſoutient le corps, & la ligne CH ou FG repréſentera le reſte de la peſanteur ou ſa force relative qui agit ſur le corps pour le faire deſcendre. Donc la force qui agit ſur le corps C pour le faire deſcendre, eſt à celle qui le feroit tomber perpendiculairement en enbas ſans le plan incliné, comme FG à CG, ou (à cauſe des triangles rectangles ſemblables DAB, CFG) comme AB à AD. Or puiſqu'en quelqu'endroit que ſoit poſé le corps C, le triangle CFG eſt toujours le même, la force FG ſera toujours appliquée au corps C, de la même maniere que la force CG lui ſeroit appliquée, ſi ce n'étoit le plan incliné : mais la force CG feroit tomber le corps C par un mouvement uniformément accéléré : Donc la force FG le fait deſcendre auſſi par un mouvement uniformément accéléré.

2°. Les accroiſſements de vîteſſe tant dans le corps qui deſcend de A en D, que dans celui qui tomberoit librement, ſont à chaque inſtant infiniment petit comme les forces qui les produiſent, c'eſt-à-dire, comme FG à CG, ou comme AB à AD. Donc la ſomme de tous ces accroiſſements, c'eſt-à-dire, la vîteſſe acquiſe en deſcendant tout le long du plan incliné, eſt à la ſomme de tous les accroiſſements de vîteſſe du corps qui tomberoit librement, ou à la vîteſſe acquiſe par ſa chûte, comme AB eſt à AD (Elem. 310).

Digitized by Google

115. COROLL. I. Il suit de-là que *la force qui fait descendre un corps le long d'un plan incliné n'est que la pesanteur diminuée dans le rapport de la hauteur du plan incliné à sa longueur*, de sorte que les vîtesses acquises sont comme les temps, & ceux-ci sont comme la suite naturelle 1. 2. 3. 4. 5. &c. (95). Que les espaces parcourus depuis A sont comme 1. 4. 9. 16. 25. &c. (98). Et les espaces parcourus entre chaque intervalle de temps comme 1. 3. 5. 7. 9. &c. (97). Qu'enfin l'espace parcouru depuis A jusqu'en F ou en D, n'est que de la moitié de celui que le corps auroit parcouru en même temps uniformément avec la vîtesse acquise en F ou en D (96).

116. COROLL. II. *Si du point* B *on mene la perpendiculaire* BK; AK *sera l'espace parcouru par le corps* C, *tandis que ce corps tomberoit librement de* A *en* B. De la formule $e = ptt$, on conclud qu'en temps égaux les espaces sont comme les forces accélératrices; or les pesanteurs sont ici comme AB à AD ou comme AK à AB; donc les espaces parcourus en même temps sont comme AK à AB. Ou bien, tandis que AD exprime la vîtesse de la chûte, AB exprime celle de la descente (114). Or AD : AB :: AB : AK : donc tandis que AB exprime la vîtesse de la chûte, AK exprime celle de la descente.

117. COROLL. III. Donc quand un corps qui descend sur un plan incliné est dans un point K quelconque, si on veut déterminer l'espace qu'auroit parcouru en même temps un corps qui seroit tombé du même point A, il faut élever une perpendiculaire KB au plan incliné, qui déterminera sur AB le point B qu'on cherche.

118. COROLL. IV. *Un corps employe autant de temps à descendre le long d'une corde* AK *quelconque d'un cercle, qu'à tomber librement le long de son diametre* AB (fig. 11.) puisqu'en tirant KB, l'angle AKB devient droit (Elem. 468). Ainsi *les temps de la descente le long de toutes les cordes d'un même cercle sont égaux entr'eux: & si* A *est un point de contact commun à plusieurs cercles, des corps qui descendroient en même temps le long des cordes* AK, AD, AB, AE, *parcourroient*

Digitized by Google

en temps égaux les parties kK, dD, bB, eE.

119. COROLL. V. Deux corps étant partis en même temps d'un même point A, (fig. 6.) & descendants le long de deux plans AD, AM différemment inclinés, si l'on veut déterminer où est le corps qui parcourt AM, lorsque l'autre corps est en K, il faut élever la perpendiculaire KB, & par le point B où elle rencontre la verticale AB, il faut abaisser sur AM la perpendiculaire BL, & le point cherché sera L.

120. COROLL. VI. *Le temps que le corps* C *employe à descendre de* A *en* D, *est à celui qu'il employeroit à tomber de* A *en* B, *comme* AD *est à* AB. Car à cause du mouvement uniformément accéléré, le quarré du temps de la descente par AD, est au quarré du temps de la descente par AK, comme AD à AK (99) : or (Elem. 561.) ∴ AD. AB. AK, donc (Elem. 318.) $AD^2 : AB^2 :: AD : AK$: donc le quarré du temps par AD est au quarré du temps par AK, comme AD^2 à AB^2. Donc (Elem. 308.) le temps de la descente le long de AD, est au temps de la descente le long de AK, c'est-à-dire (116) de la chûte libre le long de AB, comme AD à AB.

121. COROLL. VII. *Les temps employés à descendre le long de tant de plans inclinés de même hauteur qu'on voudra, sont entr'eux comme les longueurs de ces plans.* Car AD est à AB, comme le temps employé à descendre de A en D, est au temps employé à tomber de A en B (114) : par la même raison AM est à AB, comme le temps employé à descendre de A en M, est au temps employé à tomber de A en B. Donc le temps employé à descendre de A en D, est au temps employé à descendre de A en M, comme AD est à AM.

122. COROLL. VIII. *Les vîtesses acquises à la fin des descentes le long de tant de plans inclinés qu'on voudra* AD, AM, *qui ont une même hauteur* AB, *sont égales entr'elles, & à celle qui est acquise en* B *par la chûte d'un corps de* A *en* B. Car puisque les espaces AB, AK sont parcourus par un mouvement uniformément accéléré, la vîtesse acquise en B est

Digitized by Google

à la vîteſſe acquiſe en K, comme $\frac{2AB}{T}$, à $\frac{2AK}{t}$, (113) ou à cauſe des temps égaux $T = t$, & des coefficients conſtants 2, comme AB à AK, ou à cauſe des Triangles rectangles ſemblables AKB, ABD, comme AD à AB. Mais (99) le quarré de la vîteſſe en D eſt au quarré de la vîteſſe en K, comme AD à AK; & (Elem. 561) $\div$ AD. AB. AK : Donc (Elem. 318) AD : AK :: $AD^2 : AB^2$. Donc le quarré de la vîteſſe en D, eſt au quarré de la vîteſſe en K, comme AD^2 à AB^2. Donc (Elem. 308) la vîteſſe acquiſe en D eſt à la vîteſſe en K, comme AD à AB, ou comme la vîteſſe acquiſe en B eſt à la vîteſſe acquiſe en K. Donc (Elem. 306.) la vîteſſe en D eſt égale à la vîteſſe en B. Par un même raiſonnement la vîteſſe en M eſt égale à la vîteſſe en B, & par conſéquent égale à la viteſſe acquiſe en D; & ainſi de tant d'autres qu'on voudra. Puiſque AB exprime toutes les peſanteurs particulieres, tandis que AM, AD, &c. expriment la peſanteur des chûtes libres; & que les temps des deſcentes ſont auſſi exprimés par AM, AD, &c. tandis que AB exprime le temps de la chûte libre, il ſuit de la formule $u = 2pt$ que les vîteſſes des deſcentes ſont exprimées par $2AB \times AM$, $2AB \times AD$, &c. & celle de la chûte libre par $2AM \times AB$, $2AD \times AB$, &c. ce qui eſt égal.

123. REMARQUE. Par des raiſons contraires on verra qu'un corps qui monte le long d'un plan incliné en vertu d'une force qui lui a été imprimée, y monte par un mouvement uniformément retardé, & qui a les mêmes propriétés que le corps qui ſeroit jetté en l'air perpendiculairement. Pour y appliquer la Théorie précédente, il faut tout compter depuis le point où il a totalement perdu ſa vîteſſe, & où il ceſſe de monter.

Du Mouvement rectiligne relatif.

124. IL faut ici ſe rappeller le mouvement de la boule qui roule le long du bord A*n* (fig. 8) du vaiſſeau

Digitized by Google

pour aller toucher le point *n* (64). Il eſt clair qu'un homme poſé en A la voit aller tout le long du bord A*n* ſuivant une direction perpendiculaire au côté AQ & à la route AG du vaiſſeau, quoique cette boule aille réellement de A en *l* ſuivant une direction A *l* inclinée à ce côté & à cette route, & qui eſt la Diagonale du Parallélogramme *m n* : que par conſéquent A *l* étant la direction du mouvement abſolu, A*n* eſt celle du mouvement relatif de cette boule par rapport au corps en A, qui ſe meut lui-même le long de A G, avec une vîteſſe égale à celle du vaiſſeau, & qui ſe croit immobile en A.

125. THEOREME I. *Si deux corps* A *&* B *ſe meuvent dans une même droite & ſuivant la même direction ; la vîteſſe relative de* A *par rapport à* B *qui ſe croit immobile, eſt, ou nulle, ſi leurs vîteſſes abſolues ſont égales ; ou comme la différence de leurs vîteſſes abſolues, ſi elles ſont inégales ; & alors, ſi* A *va plus vîte, la direction de la vîteſſe relative eſt auſſi dans le même ſens ; mais ſi* B *va plus vîte, elle eſt dans le ſens contraire. Et ſi leurs directions ſont en ſens contraire, la vîteſſe relative de* A *par rapport à* B *eſt comme la ſomme de leurs vîteſſes abſolues, & elle ſe fait dans la direction du corps* A.

DEM. Car il eſt clair que ſi deux corps partent d'un même point avec une même vîteſſe dans un même ſens, ils iront toujours enſemble ſans anticiper l'un ſur l'autre. Donc ſi l'un ſe croit immobile, l'autre lui paroît auſſi immobile.

Mais ſi A a plus de vîteſſe que B, alors A anticipera ſur B de l'excès de ſa vîteſſe ; donc B ſe croyant immobile verra le corps A ſe mouvoir dans la direction de la vîteſſe abſolue de A, avec une vîteſſe relative égale à l'excès de cette vîteſſe abſolue ſur celle de B : ſi au contraire B va plus vîte que A, ce ſera B qui anticipera ſur A ; donc A paroîtra à B reculer avec une vîteſſe relative égale à l'excès de la vîteſſe abſolue de B ſur celle de A.

Enfin ſi les directions des vîteſſes abſolues ſont oppoſées, A s'écartera d'autant plus de B qu'ils auront chacun plus de vîteſſe. Donc alors B ſe croyant immobile, attribuera

Digitized by Google

au corps A une vîteſſe égale à la ſomme des vîteſſes abſolues de A & de B.

126. COROLL. Puiſque en temps égaux les vîteſſes ſont comme les eſpaces parcourus uniformément, il ſuit que *ſi on connoît la diſtance de deux corps qui ſe mouvans uniformément ſur une même ligne droite, tendent à ſe rencontrer, & ſi on connoît les eſpaces que chacun y parcourt dans un temps donné, on trouvera l'inſtant du concours & le point où il ſe fera.* Il ne faudra faire que ces deux proportions, Comme la ſomme des eſpaces parcourus dans le temps donné, ſi les corps vont en ſens contraire; ou comme leur différence, s'ils vont dans le même ſens, eſt à ce temps: ainſi la diſtance donnée, eſt à l'intervalle de temps compris entre l'inſtant où les corps étoient à la diſtance donnée, & l'inſtant de leurs concours.

Pour avoir le lieu du concours, on fera, Comme le temps donné, eſt à l'eſpace que parcourt un des deux corps dans ce temps: ainſi le temps trouvé dans la précédente Analogie, eſt à la diſtance de ce corps au point de concours. C'eſt ainſi qu'on calcule le temps & le lieu des conjonctions des Planetes.

127. PROBLEME. *Un corps* A (fig. 7, 8 & 9) *allant uniformément de* A *vers* L, *tandis qu'un corps* B *va uniformément de* B *vers* M, *déterminer la direction & les circonſtances du mouvement relatif de* A *par rapport à* B, *qui croit reſter toujours en* B.

SOLUTION. Soit la vîteſſe de A = *a*, celle de B = *b*. Prenez une partie quelconque AL & faites *a* : *b* :: AL : BM, & le corps A ſera en L dans le même inſtant que le corps B ſera en M. (51). Tirez ML, & par le point B menez BN parallele & égale à ML, & parce qu'alors le point N eſt par rapport au point B ſitué de la même maniere, & à la même diſtance, que le point L par rapport au point M, il ſuit que ſi le corps B qui eſt réellement en M s'imagine être en B, le corps A qui eſt réellement en L, lui doit paroître en N. On voit de même que lorſque le corps B ſera réellement en *m*, & le corps A en *l*, en tirant B*n* parallele & égale à *ml*, le corps B qui ſe croit toujours en B, s'imaginera voir le corps A en *n*. D'où il ſuit 1°, que

Digitized by Google

le corps A, qui par ſon mouvement abſolu ſe meut ſuivant AL paroîtra ſe mouvoir le long de AN. 2°. Qu'à cauſe que AL, & B ſont donnés de poſition, & que LN eſt égale & parallele à BM, *l n* égale & parallele à B *m*, les triangles ANL, A *n l* ſont auſſi déterminés de poſition & ſemblables; d'où il ſuit 3°, que N *n* mouvement relatif, eſt toujours à L *l* mouvement abſolu dans un rapport conſtant.

REM. On peut appeller le point M le *vrai lieu de l'œil* du corps B, le point B le *lieu imaginaire de l'œil* du corps B, le point L le *lieu abſolu* du corps vu A, & le point N le *lieu relatif* du corps vu.

128. COROLL. I. *Le vrai lieu de l'œil, ſon lieu imaginaire, le lieu abſolu du corps vu, ſon lieu relatif ſont aux quatre angles d'un parallélogramme*; de ſorte que le lieu imaginaire de l'œil & le lieu abſolu du corps vu ſont à deux angles oppoſés, & que le vrai lieu de l'œil, & le lieu relatif du corps vu ſont aux deux autres angles oppoſés, & par conſéquent ils ſont toujours dans une ſituation oppoſée.

129. COROLL. II. *Si le mouvement abſolu d'un corps eſt uniforme, ſon mouvement relatif par rapport à un corps mû uniformément, ſera uniforme.*

130. COROLL. III. *Si l'eſpace à l'égard duquel on détermine le mouvement relatif ſe meut uniformément en ligne droite, tout ce que nous avons dit juſqu'ici du repos & du mouvement abſolu conviendra au mouvement relatif.* C'eſt ainſi que quand un vaiſſeau va uniformément, ceux qui y ſont renfermés ne s'apperçoivent point de ſon mouvement, & qu'ils y exécutent eux-mêmes librement toutes ſortes de mouvements; mais quand il arrive quelque ſecouſſe, alors les corps en repos ſont ébranlés, & ceux qui ſont en mouvement, vont irréguliérement.

131. COROLL. IV. *Quand un corps libre paroît ſe tenir dans un repos parfait, ou n'avoir qu'un mouvement uniforme en ligne droite, c'eſt une marque que le lieu dans lequel il ſe trouve eſt lui-même ou dans un repos abſolu, ou n'a qu'un mouvement uniforme en ligne droite.*

132. COROLL. V. *Si deux corps partent d'un même point*

Digitized by Google

A, (fig. 8) *le mouvement relatif* N *n*, *eſt au mouvement abſolu* L *l comme* AN *eſt à* AL; à cauſe des triangles ſemblables ANL, A*n l*, & que AN = ML.

133. COROLL. VI. *Si les directions* BM, AL *étoient paralleles, la direction du mouvement relatif ſeroit dans la même ligne que celle du mouvement abſolu.* Car puiſqu'il faut que BN ſoit égale & parallele à ML, elle iroit former un Parallélogramme avec AL & BM qui ſont déja ſuppoſées paralléles.

134. COROLL. VII. Il eſt aiſé de voir dans quel ſens ſe fait le mouvement relatif par rapport à l'abſolu : Dans la fig. 8 & 9 le corps A vu de B paroît rétrograder ; & dans la fig. 7 il paroît aller dans le même ſens que ſa direction véritable.

135. COROLL. VIII. *Si on connoît le mouvement abſolu d'un corps* A *ſuivant* AL *& ſon mouvement relatif ſuivant* AN *avec une vîteſſe quelconque, on déterminera le mouvement abſolu du corps* B *à l'égard duquel le mouvement du corps* A *ſuivant* AN, *eſt relatif.* Car ayant pris ſur AL & ſur AN deux eſpaces parcourus en même temps, comme AL, AN, on ménera par un point B pris à volonté une parallele BM à la droite NL, & elle ſera la direction du mouvement abſolu d'un corps qui ſe ſeroit trouvé en B, quand le corps A aura été en A, & dont la vîteſſe abſolue eût été à celle du corps A, comme NL à AL.

136. COROLL. IX. *Il peut donc y avoir une infinité de corps par rapport auxquels le mouvement relatif du corps* A *ſe faſſe de même maniere le long de* AN; puiſque le point B eſt indéterminé : mais il faut pour cela que la vîteſſe de tous ces corps ſoit égale, & leurs directions ſont déterminées par la poſition de la ligne NL.

137. COROLL. X. *Etant donné le mouvement relatif de* A (fig. 9) *& le mouvement abſolu de* B, *il eſt facile de déterminer les circonſtances du mouvement abſolu de* A. Et d'abord pour ſavoir en quel point les corps A & B ſe trouveront le plus près qu'il eſt poſſible l'un de l'autre, on remarquera qu'à cauſe que les diſtances BN du corps B aux lieux relatifs

Digitized by Google

N du corps A, ſont égales aux diſtances abſolues ML du même corps B en M, au corps A qui eſt alors en L; ſi du point B on abaiſſe ſur AN la perpendiculaire BR, elle ſera (Elem. 437) la plus courte ligne qu'on puiſſe mener de B ſur AN, & par conſéquent elle marquera la plus petite diſtance poſſible à laquelle les deux corps puiſſent parvenir par leur mouvement abſolu. Menant donc RQ parallele à BM, & prenant BP = RQ, Q ſera le vrai lieu du corps A, & P le lieu correſpondant du corps *B*.

138. II°. Pour déterminer les points où A & B ſe trouveront à une diſtance égale à une ligne donnée BN; du point B comme centre avec le rayon BN, décrivez un arc qui coupe en N la ligne du mouvement relatif, & ayant mené NL parallele à BM & pris BM = NL, on aura les points cherchés M, L.

Ce Problême a deux ſolutions quand la ligne donnée eſt plus grande que la perpendiculaire BR, il n'en a qu'une quand elle lui eſt égale, & il eſt impoſſible quand elle eſt plus petite.

139. III°. Pour déterminer les points où A & B ſe trouveront dans un même plan perpendiculaire à la direction de B, il faut élever la perpendiculaire B*n*, mener *nl* parallele à BM, & prendre B*m* = *nl*; les points cherchés ſeront *m* & *l*.

140. IV°. Pour déterminer ceux où A & B ſe trouveront dans un plan perpendiculaire à la direction du corps A, abaiſſez BG perpendiculaire à cette direction DA, & ayant mené GK parallele à BM & pris BO = GK, on aura les points cherchés O & K.

141. COROLL. XI. Enfin on peut appliquer tout ceci au mouvement uniformément accéléré ou retardé, & faire voir que quand le mouvement abſolu du corps A & celui du corps B ſont uniformément accélérés depuis les points A & B, le mouvement relatif du corps A vu de B, eſt auſſi uniformément accéléré ou retardé; parce que ſa route apparente AG eſt toujours déterminée par des paralleles à BM; & par conſéquent les eſpaces parcourus ſur AG

Digitized by Google

en temps donnés, ſont toujours en même raiſon que ceux qui ſont parcourus en mêmes temps ſur AT.

142. REMARQUE. Si le corps vu A étoit immobile, alors ſon mouvement relatif s'appelle plus proprement un mouvement apparent : & il eſt évident qu'on peut y appliquer facilement tout ce qui a été dit ci-deſſus. On en déduira entr'autres les propriétés ſuivantes.

143. COROLL. XII. *L corps vu étant immobile, & hors du plan où l'œil ſe meut, ſa route apparente, ſoit rectiligne, ſoit curviligne, eſt une ligne égale à la route réelle de l'œil, & placée dans un plan parallele à celui de cette route réelle de l'œil.* Car ſoient B (fig. 10) le lieu imaginaire de l'œil, A le lieu abſolu du corps vu : ſoient C, D, E trois points quelconques pris ſur la route réelle de l'œil ſitué dans le plan de cette route, on trouve par la conſtruction du problême que *c*, *d*, *e* ſont les lieux apparents du corps vu: Or à cauſe des parallélogrammes A*c*BC, A*d*BD, A*e*BE, dont AB eſt une diagonale commune, & en même temps une interſection commune de tous les plans de ces parallélogrammes, dont les baſes BC, BD, BE ſont ſituées ſur le plan de la route de l'œil, leurs paralleles & égales A*c*, A*d*, A*e* doivent être ſituées dans un même plan parallele à celui de la route CDE, & former les angles *c*A*d*, *d*A*e* égaux aux angles CBD, DBE: Donc les points *c*, *d*, *e* ſont dans une ligne égale à la ligne CDE, & dans un plan parallele ; mais ces points ſont dans une ſituation oppoſée à celle des points C, D, E.

144. COROLL. XIII. *Si le corps vu eſt dans le plan de la route de l'œil, ſa route apparente y eſt auſſi.*

145. COROLL. XIV. *Si le corps vu reſte immobile au lieu imaginaire de l'œil, ſon mouvement apparent eſt préciſément le même que le mouvement réel de l'œil, mais ſeulement dans un ſens oppoſé.* C'eſt ainſi que nous imaginant être immobiles au centre de l'univers, tandis que nous tournons réellement autour de ce centre où le Soleil eſt réellement immobile, nous croyons que c'eſt le Soleil qui tourne réellement autour de nous comme autour d'un centre.

Digitized by Google

SECONDE PARTIE.

De la Rencontre mutuelle des Corps mus en ligne droite. De la Rencontre & de l'Oppoſition des Forces.

PREMIERE SECTION.

De la Rencontre mutuelle des Corps.

146. LA rencontre des corps occaſionne un choc mutuel entr'eux : & ſi la direction des corps qui ſe rencontrent eſt dans la même ligne droite, leur choc s'appelle *choc direct* : Si leurs directions ſont un angle, on appelle leur rencontre, *un choc oblique*.

147. C'eſt un fait indubitablement aſſuré par l'expérience, que tous les corps en mouvement ſe communiquent leurs mouvements dans leurs chocs, & que cette communication ſe fait de la même maniere que nous avons conçu des puiſſances qui donnoient une impulſion aux mobiles. Il y a cependant les différences ſuivantes propres aux différentes ſortes de corps.

148. Un corps qui ſeroit parfaitement dur ne pourroit communiquer ſon mouvement que dans un inſtant indiviſible, & ſans changer de figure à la rencontre des autres corps.

149. Le corps qui ſeroit parfaitement mou, communiqueroit ſon mouvement pendant un temps fini, & ce temps ſeroit égal à celui que ſes parties poſtérieures employeroient à parcourir uniformément un eſpace égal au diametre de ce corps, il prendroit en même temps la figure du corps choqué s'il étoit dur, & ſi ce corps choqué étoit un plan dur, le corps choquant s'applatiroit en une ſurface infiniment mince, ſans pouvoir reprendre ſa figure.

Digitized by Google

150. Un corps parfaitement élaſtique communiqueroit ſon mouvement dans un temps fini ; lorſque ſes parties antérieures auroient atteint le corps choqué, ſes parties poſtérieures continueroient de s'en approcher par un mouvement uniformément retardé, juſqu'à ce que le corps choqué ait reçu toute l'impreſſion que le corps choquant puiſſe lui communiquer, de ſorte que le corps choquant perdroit ſa figure ; mais il la reprendroit auſſi-tôt par un mouvement uniformément accéléré & en ſens contraire dans ſes parties poſtérieures, en ſorte que toutes les circonſtances de la reſtitution ſeroient égales à celles de la compreſſion.

Comme il n'y a pas de corps connu qui ne ſoit en partie dur, en partie mou, & en partie élaſtique, les regles que nous allons donner n'approcheront de l'exactitude qu'autant que les corps auxquels on les appliquera, auront plus ou moins de reſſort.

151. THEOREME FONDAMENTAL. *De quelque maniere que deux ou pluſieurs corps en mouvement agiſſent les uns ſur les autres, la ſomme des mouvements, s'ils agiſſent tous dans le même ſens, ou la différence des mouvements, s'ils agiſſent en ſens contraire, eſt toujours conſtante.*

Cette propriété eſt une ſuite de l'Axiome (29) *la réaction eſt égale à l'action & leurs effets ſont égaux en ſens contraires.* Si deux corps allant dans le même ſens viennent à ſe rencontrer, de quelque maniere que ce ſoit, le corps le plus fort ne pourra changer rien au mouvement du plus foible, qu'en vertu de l'excès de ſa force relative ſur celle de l'autre ; mais ce qu'il donnera de force au plus foible ſera détruit dans lui par la réaction du plus foible, qui produit un effet égal en ſens contraire : Donc en ce cas reſtera la même ſomme des forces ou des quantités de mouvement. Mais s'ils ſe rencontrent, en venant de différents côtés, le plus fort ne pourra rien changer au mouvement du plus foible, qu'en vertu de l'excès de ſa force ſur celle du plus foible : Donc ce corps plus foible détruira dans l'autre par ſa réaction, une partie du mouvement égale à toute la force

Digitized by Google

qu'il peut exercer contre le plus fort; il ne reſtera donc en tout que cet excès de force ou de quantité de mouvement : donc de quelque maniere que des corps agiſſent les uns ſur les autres, il reſte toujours la même ſomme des mouvements, s'ils vont dans le même ſens, ou la même différence, s'ils vont dans des ſens oppoſés.

Du choc direct.

152. THEOREME I. *Si deux corps non élaſtiques* M, m *viennent avec des vîteſſes quelconques* V, u, *ſe choquer en parcourant en ſens oppoſés une même droite, leur vîteſſe* c *après le choc ſera la même dans tous deux, & dans la direction du plus fort, elle ſera meſurée dans chacun par la différence du mouvement qu'ils avoient avant le choc, diviſée par la ſomme de leurs maſſes, ou* $c = \frac{MV - mu}{M+m}$.

DEM. Car puiſque (59) MV, *mu* eſt la quantité de mouvement de ces deux corps, & que la différence MV — *mu* doit (151) ſubſiſter après comme avant le choc, il eſt clair que ſi avant le choc MV — *mu* = *p*, après le choc ils n'ont d'autre force que la force *p*; donc après le choc ils ne ſe meuvent, que comme ſi une ſeule force *p* les eût frappés en même temps, dans le ſens du corps où s'eſt trouvé l'excès *p*. Or ſi une même puiſſance frappe à la fois deux corps quelconques contigus non élaſtiques, pour les faire mouvoir dans la droite où leurs centres ſe trouvent, le coup qu'elle donne ſe diſtribue également dans toutes leurs parties, & c'eſt comme ſi elle n'en frappoit qu'un ſeul dont la maſſe fût égale à la ſomme de celles de ces deux corps : donc les deux corps choqués s'en vont dans la direction du plus fort, avec des forces qui ſont entr'elles comme leurs maſſes. Or dans ce cas la formule générale *f* = *mu* (59) fait voir 1°, que leur vîteſſe doit être égale, puiſque dans cette formule 1 = *u* quand *f* = *m*. 2°, Que cette vîteſſe commune eſt égale à la force *p* (ou MV — *mu*) qui l'a produite diviſée par la

Digitized by Google

masse $M+m$ mise en mouvement, puisque dans cette formule $u=\frac{f}{m}$. Donc après le choc les deux corps vont ensemble dans la direction du plus fort avec une vîtesse $c=\frac{MV-mu}{M+m}$.

153. COROLL. I. *Si les masses & les vîtesses sont égales, ou si les masses sont réciproquement comme les vîtesses, le choc arrêtera leur mouvement;* car alors $MV=mu$, donc $MV-mu=0$, & c devient une quantité infiniment petite.

154. COROLL. II. *Si les masses sont égales & les vîtesses inégales, après le choc les deux corps iront dans le sens du plus prompt, avec la moitié de la différence des vîtesses;* car alors $c=\frac{V-u}{2}$.

155. COROLL. III. *Si les masses sont égales, & si* m *l'un des deux est en repos, ou n'a qu'une vîtesse infiniment petite; après le choc les deux corps iront dans le sens du corps en mouvement* M *avec la moitié de sa vîtesse*; car alors $u=\frac{1}{\infty}$, & la formule $c=\frac{V-u}{2}$ devient $c=\frac{V}{2}$.

156. COROLL. IV. *Si les vîtesses sont égales & les masses inégales, après le choc les corps iront dans le sens de celui dont la masse est la plus grande, & la vîtesse de chacun sera à la vîtesse qu'il avoit avant le choc, comme la différence des masses est à leur somme;* car alors $c=\frac{M-m}{M+m}$.

157. COROLL. V. *Si l'un des deux corps* M *est immobile, l'autre corps* m *après le choc restera en repos;* car alors la masse du corps immobile est censée infinie, & sa vîtesse infiniment petite, ou bien $M=\infty$, & $V=\frac{1}{\infty}$: Donc $MV=1$, & $c=\frac{1-mu}{\infty+m}$, qui est une quantité infiniment petite.

158. THEOREME II. *Si un corps non élastique* M *rencontre un autre corps* m *qui va plus lentement dans la même direction, il en accélérera la vîtesse, de sorte qu'après le choc les deux corps n'auront*

Digitized by Google

n'auront plus qu'une même vîteſſe, qui ſera exprimée par la ſomme de leurs mouvements, diviſée par la ſomme de leurs maſſes.

DEM. Car (151) avant & après le choc on a $MV + mu$ pour leur force commune. Or (60) la vîteſſe eſt comme la force diviſée par la maſſe : donc la vîteſſe commune de ces deux corps eſt après le choc $\frac{MV+mu}{M+m}$. On conçoit en effet que le corps choquant ne peut ceſſer de pouſſer le corps plus lent, tant que celui-ci n'aura pas acquis une égale vîteſſe.

159. THEOREME III. *Les corps non élaſtiques ou ſans reſſort ne ſe ſéparent point après le choc direct ; mais les corps à reſſort ſe ſéparent toujours après un choc quelconque.*

DEM. La premiere partie eſt évidente, parce que ſuivant les deux Théorêmes précédents, les corps non élaſtiques ſont ou arrêtés, ou vont enſemble dans la direction du plus fort avec une vîteſſe égale.

Si un corps parfaitement dur ou mou vient à rencontrer directement un plan parfaitement dur & inébranlable, ou ce qui revient au même, d'une maſſe infinie, on ne voit rien dans ce choc qui repouſſe le corps choquant : ce n'eſt pas ſa direction puiſqu'elle tend vers le plan ; ce n'eſt pas le plan, puiſqu'il eſt inébranlable, & qu'étant ſuppoſé dur, ſes parties ne ſont capables d'aucun mouvement particulier, qu'elles puiſſent communiquer au corps qui les choque ; il faut donc concevoir que le mouvement du corps choquant ſe diſtribue dans toutes les parties du corps choqué, leſquelles, à cauſe de leur nombre infini, n'en recevoient chacune qu'une partie infiniment petite, & par conſéquent ſont cenſées n'en reſſentir aucun effet fini. Donc les corps ſans reſſort ne peuvent être réfléchis dans leur choc mutuel.

160. Mais ſi le corps choquant a un reſſort parfait ; c'eſt-à-dire, ſi en s'appliquant contre un plan dur & inébranlable, il change de figure pendant le temps que le choc produit ſon effet, ou juſqu'à ce que la réaction du plan choqué ait éteint ſon mouvement relatif dans la di-

rection du choc, & s'il reprend enſuite ſa figure avec une force de reſtitution égale à celle de compreſſion, mais dans un ſens contraire, ce plan lui ſert d'appui; à meſure qu'il reprend ſa figure toutes ſes parties reçoivent une impreſſion dans la direction contraire à celle du choc, & par conſéquent le corps retourne en arriere dans cette direction. Ce ſeroit la même choſe ſi on ſuppoſoit le plan comme inébranlable, mais à reſſort parfait, & le corps parfaitement dur. Et ſi on ſuppoſe deux corps élaſtiques & mobiles, il ſera facile de concevoir comment ils doivent ſe ſéparer après le choc. L'effet de la compreſſion eſt d'éteindre, comme dans le choc des corps ſans reſſort, l'oppoſition de leurs mouvements, & de leur donner, s'ils étoient inégaux en force avant le choc, une tendance pour aller avec une égale vîteſſe vers un même point: leur compreſſion mutuelle eſt donc égale, & les fait tenir comme collés avec une égale force: mais on a ſuppoſé la force de reſtitution égale à la force de compreſſion; donc quand les deux corps commenceront à reprendre leur figure, leurs parties de contact leur ſerviront réciproquement d'appui, pour faire chacun un effort égal de part & d'autre, afin de s'éloigner en ſens contraire (de même qu'un reſſort à boudin étant d'abord bandé, puis lâché en le poſant librement ſur un plan, étend avec une égale force ſes deux branches en ſens oppoſés, tandis que ſon milieu reſte immobile ſur le plan, & ſert de point fixe à chaque branche). Celui des deux corps qui fait ſon effort de reſtitution dans le ſens de la tendance commune, ſe meut dans cette direction avec une force qui eſt la ſomme de la force de reſtitution & de la force de tendance commune; & celui des deux corps qui a ſon effort de reſtitution dans un ſens oppoſé à celui de la tendance commune, ne peut ſe mouvoir que par l'excès de ces deux forces, & dans le ſens de la plus grande: ſon mouvement après le choc en eſt donc ou ralenti dans le ſens de la tendance commune, ou arrêté, ou même il ſe fait dans le ſens oppoſé, ſelon que la force de reſtitution eſt plus petite, égale ou plus grande, que celle

Digitized by Google

de la tendance commune: donc après le choc les deux corps doivent se séparer.

161. THEOREME IV. *Si deux corps à ressort parfait se choquent, ils se séparent avec la même vîtesse relative avec laquelle ils s'approchoient avant le choc.*

DEM. Il est clair que la force avec laquelle deux corps se choquent dépend de leurs forces relatives: que s'ils vont dans le même sens: la force du choc est égale à la différence, de leurs forces relatives, & que s'ils vont en sens opposés, la force du choc est égale à la somme de leurs forces relatives. Mais (37) des corps à ressort parfait reprennent leur figure avec une force de restitution égale à leur force de compression, c'est-à-dire, à la force qui la leur a fait perdre: donc après le choc ils ont la même force relative qu'auparavant, donc ils se séparent avec une force relative égale à celle avec laquelle ils s'approchoient.

162. COROLL. Puisque les forces égales font des efforts égaux sur les mêmes corps, *la distance des corps choqués est égale dans des temps pris à égale distance de l'instant du choc.*

163. PROBLEME I. *Déterminer les circonstances du choc direct de deux corps à ressort parfait* M, m, *qui vont dans un même sens avec des vîtesses quelconques* V, u.

SOLUTION. Soit M le corps poursuivant, *m* le poursuivi. Puisque (125) la vîtesse relative de deux corps qui vont dans le même sens est égale à la différence entre leurs vîtesses absolues; on a d'abord $V-u$ pour l'expression de la vîtesse relative avant le choc, & $MV+mu$ (151) pour celle de la quantité de mouvement.

Supposons qu'après le choc le corps M aille encore dans le même sens avec une vîtesse absolue x, le corps m ira aussi dans le même sens avec une vîtesse z plus grande que la vîtesse x (160): & par conséquent après le choc, la vîtesse relative sera $z-x$. Et puisque la vîtesse relative après le choc doit être la même qu'avant le choc (161); on a $z-x=V-u$: donc $z=x+V-u$: Donc après le choc la quantité de mouvement du corps M sera Mx, & celle du corps m, sera $mx+mV-mu$. Or (151) après

un choc quelconque fait dans le même ſens la ſomme des mouvements eſt la même qu'avant le choc. Donc $Mx+mx+mV-mu=MV+mu$; d'où on tire aiſément $x=\frac{MV+2mu-mV}{M+m}$; & ſubſtituant cette valeur de x dans l'équation $z=x+V-u$, on en tirera de même $z=\frac{2MV+mu-Mu}{M+m}$: ce ſont les expreſſions des vîteſſes abſolues des deux corps après le choc.

Ces deux formules peuvent ſervir également dans le cas où le corps M iroit après le choc dans un ſens oppoſé à ſa direction avant le choc, comme on le va voir par les regles qui ſuivent, & par la note qui indique l'uſage des ſignes.

Regles pour les Corps à reſſort parfait, qui vont dans un même ſens ſe choquer directement. *

164. I°, *Le corps choqué ſe meut toujours dans ſa même direction avec une plus grande vîteſſe qu'avant le choc.* Cela eſt clair (160).

165. II°, *Deux corps égaux en maſſe vont dans le même ſens après avoir échangé leurs vîteſſes pendant le choc* : car alors $M=m$, & les formules deviennent par la ſubſtitution $x=u$, & $z=V$. Si donc avant le choc, le choquant alloit trois fois plus vîte que le choqué, après le choc le choqué va trois fois plus vîte que le choquant.

166. III°, *Si un corps en choque un autre égal en maſſe & en repos ; le choquant reſte en repos après le choc, & le choqué va dans la même direction, & avec la même vîteſſe que celle qu'avoit le corps choquant avant le choc.* Car alors $u=0$, donc $x=0$, & $z=V$.

* Pour faire uſage de ces formules & des ſuivantes, il faut ſe reſſouvenir que quand il y a un point fixe, une ligne fixe, un plan fixe, &c. auquel on rapporte des quantités ou des lignes, toutes celles qui ſont dans le lieu fixe ſont $=0$, & ſi on a déterminé que toutes celles qui ſont d'un certain côté ſont poſitives, celles qui ſeront de l'autre côté ſeront négatives ou précédées du ſigne $-$; ſi on a marqué par le ſigne $+$ celles qui vont de droite à gauche, il faudra marquer par $-$ celles qui vont de gauche à droite ; ſi on a marqué par $+$ celles qui montent, il faudra marquer par $-$ celles qui deſcendent. De cette ſorte après les calculs, on trouve la ſituation des quantités qui en réſultent, par le ſigne dont elles ſont précédées.

Digitized by Google

167. IV°, *Le corps choquant reſtera en repos après le choc, ſi* $mV = MV + 2mu$, *ou ſi* $M : m :: V - 2u : V$. Car alors il eſt clair que $\frac{MV+2mu}{M+m} - \frac{mV}{M+m} = 0$, donc $x = 0$.

168. V°, *Le corps choquant reculera après le choc, ſi* mV *eſt plus grand que* $MV + 2mu$. Car alors $\frac{MV+2mu}{M+m} - \frac{mV}{M+m}$ ſera une quantité négative; donc la valeur de x ſera auſſi négative, & dans le ſens oppoſé à la premiere direction du corps M.

169. VI°, *Si le corps choqué eſt en repos, & ſi ſa maſſe eſt plus petite que celle du choquant, après le choc ils vont tous deux dans la direction qu'avoit le corps choquant avant le choc.* Car alors $u = 0$, donc $x = \frac{MV-mV}{M+m}$, & $z = \frac{2MV}{M+m}$. Or M étant plus grande que m; M multipliée ou diviſée par la même quantité qui multiplie ou qui diviſe m, ſera toujours plus grande. Donc $\frac{MV}{M+m} - \frac{mV}{M+m}$ eſt une quantité poſitive, donc x eſt auſſi poſitif: donc le choquant ira toujours dans la même direction.

170. VII°, *Si le corps choqué eſt en repos, & ſi ſa maſſe ſurpaſſe celle du choquant, celui-ci reculera après le choc.* Car alors on aura comme ci-deſſus $x = \frac{MV-mV}{M+m}$, & $z = \frac{2MV}{M+m}$ dont la premiere formule ſera une quantité négative.

171. PROBLEME II. *Déterminer les circonſtances des mouvements de deux corps à reſſort parfait* M, m *qui ſe choquent en allant en ſens oppoſés avec des vîteſſes données* V, u.

SOLUTION. La vîteſſe relative des deux corps avant le choc eſt $V + u$ (125), & la quantité de leur mouvement relatif eſt $MV - mu$ (151): Suppoſons qu'après le choc le corps M aille encore dans ſa premiere direction avec une vîteſſe abſolue x, il eſt clair (160) que le corps M ira dans le même ſens avec une vîteſſe abſolue z plus grande que x; donc après le choc la vîteſſe relative (125) ſera $z - x$, & on aura (161) $z - x = V + u$: donc $z = x + V + u$.

Digitized by Google

La quantité de mouvement de M ſera Mx, & celle de m ſera $mx+mV+mu$: On aura donc auſſi (151) $Mx+mx+mV+mu=MV-mu$, d'où on tirera les expreſſions des vîteſſes abſolues des corps M, m après le choc, ſavoir $x=\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$, & $z=\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$.

Regles pour le choc direct des Corps à reſſort parfait qui viennent en ſens oppoſés.

172. I°, Lorſqu'un des deux corps eſt en repos, le choc ſe fait de la même maniere que dans les Regles III. VI. VII. du Problême précédent.

173. II°, *Si les maſſes & les vîteſſes ſont égales, après le choc les corps reculent tous deux avec une même vîteſſe*: car alors $M=m$, & $V=u$: donc $x=-V$, & $z=V$: or $x=-V$ exprime le recul du corps M, car puiſque nous avons ſuppoſé qu'il gardoit ſa direction, & qu'en conſéquence nous avons fait x poſitif, il eſt clair que cet x étant devenu négatif, le corps M ne garde pas cette direction dans le cas de l'égalité des maſſes & des vîteſſes : & puiſque les quantités poſitives marquent le ſens de la premiere direction du corps M, il eſt évident que le mouvement du corps m, qui eſt $z=V$, ſe fait dans cette direction, c'eſt-à-dire, dans une direction oppoſée à celle qu'avoit le corps m avant le choc.

174. III°, *Si les vîteſſes ſont égales, un corps arrêtera par le choc le mouvement d'un autre corps triple en maſſe; mais il reculera avec une vîteſſe double de celle qu'il avoit avant le choc.* Car ayant $V=u$, donc $x=\frac{M-3m}{M+m}$, & $z=\frac{3M-m}{M+m}$. Et ſi $m=3M$, on aura $x=-2$, & $z=0$, ou ſi $M=3m$, on aura $x=0$, & $z=2$.

175. IV°, *Si un corps plus que triple en choque un autre qui ait une égale vîteſſe, le choquant ne changera pas de direction.*

176. V°, *Si un corps moins que triple en choque un autre qui ait une égale vîteſſe, le corps choquant reculera.*

Digitized by Google

177. VI°, *Si deux corps de masses égales se choquent avec des vîtesses inégales, ils reculeront tous deux après avoir échangé leur vîtesse*; car alors $M = m$, donc $x = -u$, & $z = V$.

178. VII°, *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vîtesse sont différentes, le choquant perdra tout son mouvement dans le choc, si le produit de sa masse par sa vîtesse est égal au produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vîtesse & de la vîtesse du choquant;* si M choque m, & si $MV = mV + 2mu$, après le choc $x = 0$: car alors $\frac{MV}{M+m} - \frac{mV-2mu}{M+m} = 0$.

179. VIII°, *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vîtesse sont différentes, le choquant reculera si le produit de sa masse par sa vîtesse est plus petit que le produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vîtesse & de la vîtesse du choquant.*

180. IX°, *Si un corps en choque un autre dont la masse & la vîtesse sont différentes, le choquant gardera sa premiere direction lorsque le produit de sa masse par sa vîtesse excédera le produit de la masse du choqué par la somme du double de sa vîtesse & de la vîtesse du choquant.*

Du Choc oblique.

181. PROBLEME I. *Etant données les directions, les vîtesses, les demi-diamétres & la position de deux globes* A *&* B *sur un plan*, (fig. 13, 14) *déterminer leur point de rencontre, & la situation du plan qui touche les deux globes en ce point.*

SOLUTION. Soit AC la direction du corps A dont la vîtesse soit $= a$, soit BC la direction du corps B, sa vîtesse $= b$. Prolongez les deux directions, s'il est nécessaire, jusqu'à ce qu'elles se rencontrent en C. Faites $a : b :: AC : BK$, & vous aurez le point K où le centre du corps B se trouvera, dans l'instant que le centre du corps A sera en C (51). Sur BC comme Diagonale, faites avec AC le Parallélogramme ABFC, joignez les points F, K, & du point C comme centre, avec un rayon CG égal à la somme des demi-diametres donnés, décrivez un arc qui coupe en G la droite FK,

Digitized by Google

prolongée s'il eſt néceſſaire ; menez GE parallele à AC, & EH parallele à GC, les points E, H ſeront les lieux des centres des corps donnés à l'inſtant de leur contact. Et ſi du point de contact D on éleve ſur HE la perpendiculaire DP, elle déterminera la poſition du plan, qui touche les deux globes au point D.

DEM. Puiſque par conſtruction GE eſt parallele à AC ou à BF, les Triangles GKE, KFB ſont ſemblables; donc KE : KB :: GE ou CH : BF ou AC. Donc (Elem. 304) KB — KE ou BE : KB :: CA — CH ou AH : AC & BE : AH :: BK : AC: donc puiſque les eſpaces BE, AH ſont dans le rapport des vîteſſes, le corps B ſe trouvera en E, quand le corps A ſera en H : & comme la diſtance de ces points eſt HE, qui eſt égale à CG, ſomme des demi-diametres des corps donnés, il ſuit qu'ils ſe toucheront alors.

182. SCHOLIE. Il eſt clair 1°, que le Problême ſeroit impoſſible, ou que les corps ne ſe toucheroient pas, ſi GC ſomme des demi-diametres étoit plus petite que la perpendiculaire tirée de C ſur FK. 2°, Que quand GC eſt égale à cette perpendiculaire, les deux corps ne ſe peuvent toucher qu'une fois. 3°, Que lorſque GC eſt plus grande, le Problême peut avoir deux Solutions, en ſuppoſant que les corps ſe pénétrent comme feroient deux ombres, deux images, (ou comme la Lune avec l'ombre de la Terre dans les Eclipſes:) parce qu'on peut mener du point C ſur FK deux droites comme CG égales entr'elles, ce qui donneroit les deux points où ils ſe touchent pour ſe pénétrer, & ceux où ils ſe touchent pour ſe ſéparer. Mais quand les corps ſont ſolides, ils ne ſe touchent qu'une fois, comme ils feroient pour ſe pénétrer; enſuite ils ſe quittent par le choc, à moins qu'ils ne ſoient abſolument durs, & que leurs directions ne ſoient dans la même ligne droite.

183. THEOREME. *La force du choc oblique d'un corps quelconque ſur un plan immobile, eſt à la force du choc perpendiculaire ſur le même plan, comme le ſinus de l'angle de l'inclinaiſon de la direction du corps ſur le plan, eſt au ſinus total.*

DEM. Soit un corps en A, (fig. 12) qui aille frapper

Digitized by Google

obliquement en B un plan inébranlable CD ſuivant la direction AB, laquelle exprime la force abſolue du corps, ſoit que ſon mouvement ſoit uniforme, ſoit qu'il ſoit uniformément accéléré : Je dis que la force du coup en B eſt à la force que ce coup auroit eu ſi le plan CD eût été perpendiculaire à la direction AB, comme le ſinus de l'angle ABC, eſt au ſinus total.

Car ſi la direction AB eût été perpendiculaire au plan CD, le corps A eût frappé ce plan avec toute ſa force abſolue ; mais parce que la direction AB eſt oblique au plan CD, le corps A n'agit deſſus qu'avec une force relative (86) : ſa force abſolue ſe décompoſe en deux, l'une AF parallele au plan, & qui exprime la partie de la force abſolue qui n'agit pas ſur le plan, l'autre AC perpendiculaire au plan, & qui exprime la partie de la force abſolue qui agit ſur le plan, c'eſt-à-dire, qui exprime la force relative du corps A par rapport à ce plan. Donc la force du coup oblique eſt à celle du coup perpendiculaire, comme AC à AB, c'eſt-à-dire, (Elem. 747) comme le Sinus de l'angle ABC au Sinus total.

184. COROLL. *Il ſuit de-là que tout effort* E *d'un corps, poids, ou puiſſance* A *qui agit obliquement, eſt comme le produit de ſa maſſe ou force abſolue* M, *par la perpendiculaire* AC, *tirée d'un point quelconque de ſa direction ſur le plan* CD *où ſe fait l'action* : comme nous avons déja vû (87). Parce que l'effort eſt d'autant plus grand que cette maſſe ou force eſt plus grande ; & que la perpendiculaire AC eſt plus grande par rapport à la direction AB. Ainſi (15) $E = M \times AC$.

185. PROBLEME II. *Trouver ce qui doit arriver à un corps qui va choquer obliquement un plan immobile.*

I. Cas. Soit le corps A ſans reſſort, qui aille frapper le plan dur & immobile BD ſuivant la direction AB, il eſt clair 1°, que ſa force ſe décompoſe en deux, l'une ſuivant AF parallele au plan, l'autre ſuivant AC qui lui eſt perpendiculaire. 2°, Qu'il n'y a que la force ſuivant AC qui agiſſe ſur le plan. 3°, Que cette force eſt totalement détruite par le choc (157) ; d'où il ſuit qu'après le choc il

Digitized by Google

ne reſte plus au corps que la partie de ſon mouvement abſolu, dont la direction eſt parallele au plan; donc le corps ſe meut après le choc parallélement à la ſurface du plan qu'il a choqué, c'eſt-à-dire, le long de BD, avec une force ou une vîteſſe exprimée par AF, ou par ſon égale BD.

186. II. Cas. Si le corps A eſt à reſſort parfait, il eſt certain qu'à cauſe de l'obliquité de la direction, la force abſolue eſt décompoſée dans le choc en deux forces AF, AC, dont l'une repréſentée par AF ſubſiſte toute entiere; ſa direction eſt parallele au plan où s'eſt fait le choc, & ſa vîteſſe eſt exprimée par BD=AF: & qu'à cauſe du reſſort parfait, la force ſuivant la perpendiculaire AC ne ſe perd pas, mais qu'elle renaît après le choc ſuivant une direction auſſi perpendiculaire au plan oppoſé & égale à la premiere, c'eſt-à-dire, ſuivant BF=CA. Donc après le choc le corps a deux déterminations à la fois, l'une ſuivant BD, l'autre ſuivant BF; donc il décrira la Diagonale BE du Parallélogramme fait ſur ces directions, lequel ſera égal au Rectangle FC, & BE ſera égale à BA, le Triangle ABC au Triangle EBD. Donc *un corps à reſſort parfait choquant obliquement un plan immobile ne perd rien de ſa force; mais il ſe réfléchit en faiſant l'angle de réflexion* EBD, *égal à l'angle d'incidence* ABC.

187. PROBLEME III. *Déterminer ce qui doit arriver à deux corps ſphériques* Q, K *qui ſe rencontrent ſuivant les directions obliques* AQ, BK. (fig. 15, 16).

SOLUTION. Ayant déterminé (181) le point de leur rencontre C, & la ſituation du plan DC où ils ſe touchent, puis décompoſé les forces de ces deux corps en deux forces AG, BF paralleles au plan DC, & en deux A*d*, B*e*, ou GQ, FK perpendiculaires à ce plan, il faut conſidérer que les forces AG, BF qui ne contribuent en rien au choc, ſubſiſtent toutes entieres après le choc, & que le choc ne ſe fait proprement que ſuivant les directions oppoſées GC, FC, avec les forces exprimées par GQ, FK. Soit la maſſe M du corps Q=7, ſa vîteſſe V ſuivant GC

Digitized by Google

exprimée par GQ = 5, soit la masse m du corps K = 3, & sa vîtesse u suivant FC, exprimée par FK = 4.

I. Cas. Si les corps sont sans ressort, il faut calculer ce qui arriveroit à ces corps, s'ils se choquoient suivant les directions opposées GC, FC (fig. 15); & ayant trouvé par la formule $c = \frac{MV - mu}{M+m}$ (152) que $c = 2, 3$, & qu'ainsi les deux corps doivent après le choc se mouvoir tous deux dans le sens de la direction GC, ayant chacun une vîtesse = 2, 3, il faut prendre QP & KL = 2, 3; par P mener au plan CM la parallele PH = AG, tirer QH; par le point L mener à ce plan la parallele LI = BF, & tirer KI. Je dis qu'après le choc le corps Q ira dans la ligne QH, & qu'il arrivera en H en même-temps que le corps K, qui parcourra KI, arrivera en I.

Dem. Car si on acheve les rectangles Pm, Ln, on verra qu'après le choc le corps Q est déterminé à se mouvoir suivant deux directions; l'une QP perpendiculaire au plan, & qui est la partie de la vîtesse GQ que le choc lui a laissée, & l'autre PH parallele au plan que le choc n'a pas détruite. D'où il suit (68) que le corps Q décrira la Diagonale QH de ces deux directions, avec une vîtesse exprimée par QH. On verra de même qu'après le choc le corps K a deux déterminations, l'une suivant KL que le choc du corps Q plus fort que lui l'a obligé de prendre, & l'autre suivant LI = BF, que le choc n'a pas changée: Donc le corps K en parcourra la Diagonale, avec une vîtesse exprimée par KI.

188. II. Cas. Si les corps sont à ressort parfait, il faut calculer de même ce qui leur doit arriver après le choc dans les directions opposées GC, FC, (fig. 16) & ayant trouvé d'abord par la formule $x = \frac{MV - mV - 2mu}{M+m}$ (171) que la vîtesse du corps Q est $-0, 4$, & par conséquent négative, il faut prendre QP = 0, 4, du côté opposé à la direction GC qui a été supposée positive dans la solution du Problême qui a donné cette formule: ensuite mener au plan DM la parallele PH = AG, puis tirer la droite

Digitized by Google

QH qui ſera la direction, & exprimera la vîteſſe du corps Q après le choc. Ayant après cela trouvé par la formule $z=\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$, que z eſt poſitive, & $=8, 6$, il faut prendre $KL=8, 6$ dans le ſens de la direction GC, mener LI parallele au plan & $=BF$: la droite KI ſera la direction, & exprimera la vîteſſe du corps K après le choc, ce corps arrivera en I dans l'inſtant que le corps Q arrivera en H. La Démonſtration eſt la même que celle du cas précédent.

189. COROLL. *Dans le choc oblique*, auſſi bien que dans le choc direct, *les corps élaſtiques ſont également éloignés l'un de l'autre, dans les inſtants également éloignés de celui du choc.* On le prouve en faiſant voir que $IH=AB$ (fig. 17). Pour cela je dis que les Trapezes ABFG, PLIH ſont égaux. Car par la conſtruction, les angles homologues GFB, PLI ſont droits, & les côtés adjacents BF, LI ſont égaux, il en eſt de même des angles FGA, LPH & des côtés adjacents AG, PH; reſte donc à faire voir que $FG=LP$, ou à cauſe de leur partie commune QK, que $KF+QG=QP+KL$. Ce qui eſt facile; car $KF+QG=u+V$; & $QP=\frac{MV-mV-2mu}{M+m}$ qu'il faut prendre négativement dans cette figure, à cauſe des ſuppoſitions ſur leſquelles on l'a conſtruite, & $KL=\frac{2MV+Mu-mu}{M+m}$.

Donc $QP+KL=\frac{-MV+mV+2mu+2MV+Mu-mu}{M+m}$

qui ſe réduit par la diviſion à $V+u$; Donc en tirant les droites AB, HI on doit former les trapezes égaux ABFG, PLIH.

190. REMARQUE I. Si le reſſort des corps eſt imparfait, il faut déterminer par expérience le rapport de la force de reſtitution à celle de compreſſion, ce qui ſe fait aiſément, en comparant les circonſtances des chocs directs de ces corps, avec celles qui accompagneroient les chocs directs des mêmes corps ſi leur reſſort étoit parfait: & alors dans

Digitized by Google

le calcul de leurs chocs directs ou obliques, au lieu de faire la force de reſtitution égale à celle de compreſſion, il faut y ſubſtituer le rapport déterminé. Par exemple, ſi le corps A (fig. 12) a un reſſort tel que ſa force de reſtitution ne ſoit que la moitié de ſa force de compreſſion, alors au lieu de prendre BF = CA, il faut prendre BH = ½ CA, & BH repréſentera la partie du mouvement ſuivant AC qui s'eſt conſervée après le choc, & ayant mené HG parallele au plan CD & égale à AF, la Diagonale BG exprimera la direction & la vîteſſe du corps après le choc.

191. D'où il ſuit que *dans le choc des corps à reſſort imparfait ſur des corps immobiles, l'angle de réfléxion eſt d'autant plus petit que l'angle d'incidence, que les corps ont moins de reſſort.*

192. REMARQUE II. Nous avons ſuppoſé les corps comme des points, ou comme des globes, à cauſe que ces corps ne ſe touchent qu'en un point, il eſt évident que ſi la figure des corps eſt différente, il faudra avoir égard à bien d'autres circonſtances qu'à celles des directions & des vîteſſes, comme nous avons fait; mais outre qu'il ſeroit trop long d'entrer dans le détail de toutes ces figures, ce que nous avons dit des corps ſphériques ſuffit, pour comprendre tous les effets ordinaires du choc, & de l'élaſticité des corps.

Application des Regles du choc des Corps à reſſort, à la Pratique du Jeu de Billard.

193. Quoiqu'on ne puiſſe pas, en jouant au Billard, conſtruire géométriquement des Problêmes, & que quand même on les auroit conſtruits, pluſieurs circonſtances pourroient empêcher le ſuccès de l'exécution, il ne ſera peut-être pas inutile de donner ici la ſolution des principaux de ces Problêmes, tant pour ſervir d'exemple de la théorie que nous avons donné, que pour faire comprendre les raiſons des différentes directions que le Joueur fait prendre à la bille de ſon adverſaire en la touchant avec la ſienne: On ſuppoſe ces billes parfaitement élaſtiques, le Billard parfait dans toutes ſes parties, & que l'applatiſſement de la bille, & l'enfoncement de la bande ſont des quantités infiniment petites dans le choc.

194. Toucher une Bille *pleine*, c'eſt la toucher en ſorte que la ligne qui joint les centres dans le choc, ſoit dans la direction de la bille touchante.

Digitized by Google

Une bille qui touche pleine une autre bille en repos, doit s'arrêter auſſi-tôt (166).

195. PROBLEME I. *Les deux billes* P, G (fig. 21) *étant données de poſition & de groſſeur, faire enſorte que la Bille* G *aille toucher pleine la bille* P *après une ſimple bricole ou réflexion.*

SOLUT. Ayant déterminé ſur quelle bande, comme XT, on veut faire la bricole, il faut tirer en dedans du billard une ligne RV parallele à cette bande, & éloignée de la moitié de l'épaiſſeur de chaque bille: Du centre P de la bille qu'on veut toucher, il faut abaiſſer ſur RV la perpendiculaire indéfinie PL, prendre FL=FP. Je dis que ſi on pouſſe la bille G tout droit vers L, elle ira toucher pleine la bille P après s'être réfléchie en N.

DEM. Car ayant tiré NL, on connoîtra aiſément que quand le centre de la bille ſe trouvera en N, ſa ſurface touchera la bande, & fera réfléchir la bille par ſon choc; enſorte que le centre retournera vers P en faiſant un angle de réflexion égal à l'angle d'incidence. Or les Triangles rectangles PNF, FNL ſont égaux, ayant le côté commun FN, & le côté FP=FL par conſtruction. Donc l'angle FNP=FNL. Or (Elem. 428) l'angle FNL=GNV: donc l'angle d'incidence étant GNV, l'angle de réflexion eſt PNF. Donc la bille G après s'être réfléchie en N, ira frapper la bille P dans la direction NP qui paſſe par ſon centre.

SCHOLIE. Comme il eſt indifférent de quelle bande on ſe ſerve, ce Problême a quatre Solutions, à moins que le fer ou quelque blouſe ne ſe trouve dans quelqu'une des directions.

196. PROBLEME II. *Les deux billes* A, B *étant données de poſition & de groſſeur, faire toucher pleine la bille* B *par une double bricole.*

SOLUTION. Ayant choiſi les deux bandes XT, XM ſur leſquelles on veut faire les bricoles, & tiré les paralleles RV, RO à la diſtance d'un demi-diametre des billes, il faut abaiſſer du centre de la bille B qu'on veut toucher, une perpendiculaire B*l* ſur la premiere bande XT, prendre *fl*=*f*B, & par le point *l* ayant tiré ſur la ligne RO prolongée en D la perpendiculaire *l*E, il faut prendre DE=D*l*, puis pouſſer la bille A, comme ſi on vouloit aller frapper tout droit le point E; elle ira frapper pleine la bille B, après que ſon centre aura fait deux bricoles, l'une en C, l'autre en *n*: la démonſtration eſt la même que celle du Problême précédent.

SCHOLIE I. Ce Problême aura ſouvent quatre Solutions, ſurtout quand les billes ſeront éloignées des coins.

197. SCHOLIE II. Si on vouloit trois ou quatre bricoles, il faudroit répéter la même opération; par exemple, ſi on ſuppoſe la bille A en L, il eſt clair que ſi après avoir trouvé le point E de la ſeconde bricole, on tire EI perpendiculaire à la droite ST (parallele à la bande MY, & éloignée d'une demi-épaiſſeur de bille prolongée en H, & ſi on prend HI=HE, en pouſſant la bille L droit vers le point I, on aura les trois bricoles en K, en G & en *n*.

SCHOLIE III. Il ſeroit très-facile de réſoudre ces Problêmes

Digitized by Google

par l'analyſe à cauſe des Triangles ſemblables qui ſe trouvent dans la conſtruction, ſuivant laquelle toutes les lignes décrites par la bille ſont paralleles deux à deux.

198. PROBLEME III. *Les deux billes* A, B, (fig. 22) *étant données de poſition, faire aller la bille* A, *vers un point donné* C, ou, ce qui eſt le même, *pouſſer la bille* A *dans une blouſe donnée* C, *& déterminer la route que ſuivra la bille* B *après le choc.*

SOLUTION. Par le centre ou l'axe de la blouſe, ou par le point donné C & par le centre de la bille A, menez la droite indéfinie CO qui coupe en I la ſurface de la bille oppoſée à la blouſe: Prenez IE = AI, & faites paſſer par E la droite indéfinie DG perpendiculaire ſur CE. Je dis que ſi on pouſſe la bille B droit au point E, elle pouſſera la bille A dans la direction AC, & qu'elle ira après le choc dans la direction EG.

DEM. Car ſi par le point I on mene IY parallele à DG, il eſt évident que ces deux droites ſont éloignées d'un demi-diametre de la bille B: que par conſéquent cette bille étant arrivée en E touche la bille A en I & la pouſſe ſuivant la direction EI, qui par la conſtruction paſſe par le point C. Mais parce que la bille A eſt en repos avant le choc, & égale à la bille B, la force relative avec laquelle la bille B l'a choquée & qui eſt exprimée par OE perpendiculaire à DG, & égale à BD, eſt éteinte (166) totalement par le choc; Donc il ne reſte plus à cette bille B, que la force ſuivant BO parallele à DE ou à IY: Donc après le choc, la bille B ſuit la direction EG.

199. PROBLEME IV. *Deux billes* H, F, *étant données de poſition & de grandeur, faire enſorte que la bille* F *aille, après tant de bricoles qu'on voudra, pouſſer la bille* H *dans une direction* HK *donnée, ou la blouſer où l'on voudra comme en* K, *& déterminer la route de la bille* F *après le choc.*

SOLUTION. Par le point K & par le centre H de la bille tirez la droite indéfinie KM, qui coupe en S la ſurface oppoſé au point K, prenez SP = SH, menez PQ perpendiculaire à KP, & faites (comme dans les deux premiers Problémes) aller la bille F au point P par tant de bricoles que vous voudrez; il eſt clair qu'en ce cas elle pouſſera la bille H vers K, & on verra, comme dans le Problême précédent, qu'après le choc, la bille F ira ſuivant la ligne PQ.

200. PROBLEME V. *Faire toucher une bille* H *en un point donné* S *après tant de bricoles qu'on voudra, & déterminer la route des deux billes après le choc.*

Ce Problême revient au précédent. Par le point donné S & par le centre H, faites paſſer la droite indéfinie MSK, & SK ſera la direction de la bille H après le choc. Prenez SP = SH, & par tant de bricoles que vous voudrez, faites paſſer le centre de la bille F par le point P, lorſqu'il y ſera, la bille F touchera la bille H au point donné S, puis elle ira dans la direction PQ.

Digitized by Google

SECONDE SECTION.

De la rencontre mutuelle & de l'oppoſition des forces.

201. ON conſidere la rencontre & l'oppoſition des forces, comme la cauſe de tous les mouvements que nous exécutons, & du repos que nous forçons les corps de garder par le moyen de l'équilibre. C'eſt pour employer les forces avec tout l'avantage poſſible, qu'on a imaginé les Machines dont nous allons parler dans cette Section, & dont la théorie connue ſous le nom de *Statique*, a fait juſqu'au commencement du dix-ſeptieme Siecle, toute la ſcience des Méchaniciens.

Suppoſitions ou Demandes.

202. I. *On peut regarder un poids quelconque comme un point peſant.* Car l'expérience nous fait voir qu'il y a en dedans ou en dehors de tout corps un point appellé le *centre de gravité* autour duquel toutes les parties de ce corps ſe contrebalancent également, en ſorte que toute la péſanteur ſemble y réſider, & qu'on peut ſubſtituer ce point à la place du corps: Nous parlerons dans la ſuite de la maniere de le trouver.

203. II. *Les directions ſuivant leſquelles les poids ſuſpendus à une même machine tendent à s'approcher du centre de la terre, ſont paralleles entr'elles.*

Car quoique ces directions aboutiſſent toutes au centre de la terre, & que par conſéquent, elles ſoient réellement inclinées les unes ſur les autres, cependant une machine eſt ſi petite en comparaiſon de ſa diſtance au centre de la terre, qu'on peut ſuppoſer que l'inclinaiſon de ces directions eſt infiniment petite ou nulle.

204. III. *L'effort des puiſſances & des poids eſt égal dans tous les points de leurs directions.*

C'eſt-à-dire, que ſi on pouſſe ou ſi on tire quelque corps avec

Digitized by Google

avec un bâton (ſuppoſé inflexible & ſans peſanteur) ce corps eſt pouſſé ou tiré avec la même force, ſoit que le bâton ſoit long, ſoit qu'il ſoit court. Et que ſi on ſuſpend un poids à un fil plus ou moins long, il n'en péſera ni plus ni moins (faiſant abſtraction du poids du fil). Car quoique la peſanteur des corps varie ſuivant leurs différentes diſtances au centre de la terre, cette variation eſt totalement inſenſible dans la longueur d'une corde à laquelle un poids eſt ſuſpendu dans une Machine.

De l'Equilibre en général, & en particulier dans les Machines.

205. IL faut ſe rappeller ce qui arrive dans les mouvements compoſés. Nous avons fait voir (72) que ſi un corps C (fig. 1.) parcourt la Diagonale CB, en vertu de l'action de deux puiſſances P, *p* exprimées par PC, *p*C, qui le pouſſent ſuivant les différentes directions CD, CA, la force F exprimée par FC, eſt capable de lui faire parcourir la même Diagonale en même-temps. D'où il ſuit, que ſi on prend dans cette Diagonale RC = FC, & que ſi on ſuppoſe en R une force égale à la force F, qui pouſſe le corps C dans la direction RC, elle empêchera l'effet de la force FC, ou, ce qui eſt le même, elle empêchera l'effet des deux puiſſances P, *p*, & le corps reſtera immobile en C. C'eſt-là ce qu'on appelle reſter en équilibre.

206. PRINCIPE FONDAMENTAL. *Il y a équilibre entre pluſieurs puiſſances, quand il ſe trouve une force* R (que j'appellerai la Réſiſtante) *égale à la force compoſée de deux autres forces* P, p (que j'appellerai les forces agiſſantes) *qui pouſſent en même temps un corps* C, *pour le mouvoir dans une direction oppoſée à celle de la force* R.

207. Ou plus généralement. *Il y a équilibre, lorſque pluſieurs forces agiſſantes qui concourent au mouvement d'un même corps* C, *& qu'on peut réduire aux deux* P, p, (80) *rencontrent une ou pluſieurs autres forces réſiſtantes, qu'on peut ré-*

Digitized by Google

duire à une R, *qui ſe trouve alors égale & directement oppoſée à l'effet des deux forces* P, p.

208. Ou bien encore : *Il y a équilibre quand la ſomme des forces relatives de tant de puiſſances agiſſantes qu'on voudra, eſt égale & directement oppoſée à la puiſſance abſolue d'une ſeule force réſiſtante, ou à la ſomme des forces relatives de tant de puiſſances réſiſtantes qu'on voudra.*

209. Réciproquement. *S'il y a équilibre entre pluſieurs puiſſances, la ſomme des forces relatives des puiſſances qui agiſſent d'un côté ſera égale à la ſomme des forces relatives des puiſſances qui agiſſent du côté oppoſé.* Et pour faire voir qu'il y a équilibre dans une machine, il faut y démontrer l'exiſtence, la direction & l'égalité de ces forces.

210. COROLL. I. Donc en général *dans l'équilibre on peut exprimer les puiſſances agiſſantes par les côtés, & la réſiſtante par la Diagonale d'un Parallélogramme.*

211. COROLL. II. *Donc quand trois puiſſances ſont en équilibre, elles ſont dans un même plan* (76).

212. COROLL. III. Dans le cas de l'équilibre entre trois puiſſances, P, *p*, R, on aura toujours les trois proportions ſuivantes.

P : *p* :: CD ou AB : CA ou DB.
P : R :: CD : CB.
p : R :: CA : CB.

& parce que (Elem. 746) dans les Triangles BCA, BCD, les ſinus des angles ſont entr'eux comme les côtés oppoſés, ſi on déſigne le ſinus par *ſ*, on aura . . . . . .

P : *p* :: *ſ*CBD ou *ſ*BCA : *ſ*BCD *ſ*ABC.
P : R :: *ſ*CBD ou *ſ*BCA : *ſ*BDC ou *ſ*BAC ou *ſ*DCA.
p : R :: *ſ*CBA ou *ſ*BCD : *ſ*BDC ou *ſ*BAC ou *ſ*DCA.

213. THEOREME I. *Si d'un point quelconque* E (fig. 18, 19, 20) *pris ſur une direction des trois puiſſances* P, p, R, *qui ſont en équilibre, on tire une perpendiculaire ſur chaque autre*

Digitized by Google

direction, (prolongée, s'il eſt néceſſaire,) *les deux autres puiſſances ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires*, EK, EH *tirées ſur leur direction.*

Car en prenant CE pour Sinus total, ces perpendiculaires ſont les Sinus des angles auſquels nous venons de voir que les puiſſances ſont proportionnelles. Ainſi. . . . . .

P : R :: EH : EK (fig. 20).
P : *p* :: EH : EK (fig. 18).
p : R :: EH : EK (fig. 19).

214. SCHOLIE. On a donc P × EK = R × EH (fig. 20); P × EK = *p* × EH (fig. 18); & *p* × EK = R × EH.

C'eſt-à-dire, qu'à cauſe de la raiſon inverſe, le produit de chaque puiſſance par la perpendiculaire tirée ſur ſa direction, eſt conſtant. Ce produit, dans le cas de l'équilibre, eſt donc une expreſſion de l'effort relatif de chaque puiſſance, (183). Donc *lorſque deux puiſſances ſont en équilibre avec une troiſieme, dire qu'elles ſont en raiſon inverſe des perpendiculaires tirées du point* E *ſur leurs directions, ou des diſtances du point* E *à leurs directions, & dire que leurs efforts ſont égaux relativement au point* E, *ſont des expreſſions équivalentes.*

215. COROLL. *Les directions des trois forces qui doivent former l'équilibre doivent concourir en un point* C; puiſqu'elles doivent agir toutes trois enſemble ſur ce même point : elles peuvent cependant être paralleles entr'elles : parce qu'alors le point de leur concours eſt à une diſtance infinie.

216. THEOR. II. *Lorſque l'effort de deux puiſſances, qu'on peut* exprimer par deux maſſes ou poids, *eſt tellement ſoutenu par celui d'une puiſſance réſiſtante, que l'équilibre ſubſiſte entre ces deux maſſes, juſqu'à ce qu'une impreſſion infiniment petite faite à l'une de ces maſſes, lui donne un mouvement qui ſe trouve contrebalancé par le mouvement oppoſé de l'autre maſſe, en ſorte que l'équilibre ſe rétabliſſe bientôt : le produit de chaque maſſe par la vîteſſe de ſon mouvement, ou par l'eſpace que chacune parcourt, ou tend à parcourir dans le même temps, eſt égal de part & d'autre.*

Digitized by Google

DEM. Puiſqu'il y a un équilibre ſubſiſtant ou rétabli, il y a de part & d'autre égalité de forces : or l'expreſſion de la force d'un corps en mouvement eſt (59) le produit de ſa maſſe par ſa vîteſſe ; ou en temps égaux, celui de ſa maſſe par l'eſpace parcouru : donc dans le cas de ce Théorême, le produit de chaque maſſe par ſa vîteſſe, ou par l'eſpace qu'elle parcourt, ou qu'elle tend à parcourir en même temps, eſt égal de part & d'autre.

217. COROLL. I. *Il y a donc équilibre quand les maſſes ou puiſſances abſolues ſont réciproquement comme les vîteſſes, ou comme les eſpaces qu'elles tendent à parcourir en même temps.*

218. COROLL. II. On verra dans la ſuite (249) qu'on peut en effet exprimer toutes ſortes de puiſſances par des poids ſuſpendus : ſi donc on veut enlever un poids P, en appliquant à une machine quelconque un autre poids p beaucoup plus petit : ſoit M la maſſe du poids P, ſa vîteſſe V ; ſoit m la maſſe du poids p, ſa vîteſſe u : dans le cas de l'équilibre il faut que $MV = mu$, & par conſéquent que $\frac{ME}{T} = \frac{me}{t}$, parce que $u = \frac{e}{t}$ (44). Cette formule nous fera connoître ce qu'on peut eſpérer de faire à l'aide des machines.

Examen de l'effet qu'on peut attendre des Machines.

219. Les Machines tendent à augmenter tellement la force relative d'une puiſſance ou d'un poids p, qu'il puiſſe contrebalancer celle du poids P, quel qu'il ſoit : or la puiſſance qu'on leur applique pour les mettre en mouvement, ne peut être ou qu'un fluide comme l'eau, le vent, &c. ou qu'un poids, ou des hommes, ou des chevaux.

A l'égard des fluides, ce n'eſt pas ici le lieu d'en parler ; il ſuffira de dire que quand ils agiſſent ſur une ſurface qu'ils ont miſe en mouvement, ils n'y agiſſent qu'avec une force qui n'eſt qu'environ $\frac{1}{7}$ de leur force abſolue : comme ſi on eſtimoit que la force d'une eau courante fût de 100 livres ſur un plan immobile ; elle ne ſe trouvera plus que de 15 livres lorſqu'elle aura mis ce plan en mouvement. *Voyez les*

Digitized by Google

Mémoires de l'Académie Royale des Sciences, année 1704.

220. On applique très-rarement des poids à une machine qui doit servir à enlever des fardeaux considérables, comme de grosses pierres au haut d'un bâtiment, parce qu'il faut à ces poids de trop grands espaces pour descendre, & qu'il faudroit les remonter trop souvent. Par exemple, pour faire monter à 100 pieds de hauteur un bloc de marbre qui péseroit 10000 livres, en appliquant à une machine quelconque un poids de 400 livres : il est aisé de calculer par la formule $ME = me$, ou $M = 10000$, $E = 100$, & $m = 400$, qu'en faisant abstraction de toutes les imperfections de la Machine, il faudroit que ce poids pût descendre de 2500 pieds, ou qu'on le remontât 25 fois, ce qui seroit très-incommode.

221. A l'égard des hommes & des chevaux, on a déterminé par plusieurs expériences, qu'un homme d'une force ordinaire, qui n'agit que par sa force & non pas par son poids en se suspendant, ne peut faire plus de 25 livres d'effort continuel sur une machine en trois heures de temps, ni parcourir avec ses pieds ou avec ses mains un espace de plus de 12000 pieds par heure : & qu'un bon cheval ne pouvoit faire que le travail de sept hommes ensemble, c'est-à-dire, qu'il ne pouvoit faire un effort continuel de plus de 175 livres en trois heures, ni parcourir en tirant continuellement, plus de 12000 pieds par heure, de sorte qu'on peut estimer que 12000 pieds est le plus grand espace possible qu'une puissance motrice puisse décrire par heure, dans un travail continu.

222. Puis donc que l'effet de toute machine, quelle qu'en soit la construction, se peut réduire à ce qu'une puissance m qui ne peut décrire que l'espace e de 12000 pieds par heure, porte un fardeau M à un espace E, & que de ces quatre choses, il n'y en a que trois d'indéterminées, il est clair que deux de ces trois devenant déterminées, la troisieme le devient nécessairement dans la formule $me = ME$, qui se tire de $\frac{me}{t} = \frac{ME}{T}$, parce que dans

une machine en mouvement, les deux puiſſances oppoſées ſont mues en même temps, de ſorte que $t = T$. Or quoique la machine ne puiſſe être en mouvement, à moins que $\frac{me}{t}$ ne ſoit un peu plus grand que $\frac{ME}{T}$, nous ſuppoſerons néantmoins leur égalité pour plus de facilité dans le calcul.

223. Cela poſé, il eſt évident que ſi m repréſente un très-petit poids, & M une maſſe conſidérable, la quantité me ne peut exprimer un grand effort, à moins que E ne ſoit d'autant plus petit par rapport à e, que M eſt plus grand par rapport à m. Or ſi e exprime un grand eſpace, il faut à proportion que le temps de la durée du mouvement de la machine devienne plus long, puiſque e ne peut excéder 12000 pieds par heure.

224. Suppoſons, par exemple, un poids de 1000000 livres qu'on veut élever à 100 pieds de hauteur. On demande 1°. quelle puiſſance il faut appliquer à une machine quelconque ſuppoſée dans un état parfait, (dont cependant toute machine eſt fort éloignée,) pour y parvenir en une heure de temps. On a donc $M = 1000000$, $E = 100$, $e = 12000$, & dans la formule $me = ME$, on trouvera $m = 8333\frac{1}{3}$ livres. Diviſant cette quantité par 25 livres ou par 175 livres, on trouve qu'il faut plus de 333 hommes, ou plus de 47 chevaux, pour ſoutenir le poids M en équilibre, à l'aide d'une machine quelconque, & à plus forte raiſon pour l'élever à 100 pieds en une heure de temps.

2°. Si on demande en combien de temps 14 hommes ou 2 chevaux pourroient élever ce poids à 100 pieds, alors $m = 25 \times 14 = 2 \times 175 = 350$ livres : $M = 1000000$, & $E = 100$. Donc $e = \frac{ME}{m} = 285714$ pieds, leſquels à raiſon de 12000 par heure, répondent à 23,8 heures, c'eſt-à-dire, à près d'un jour de travail continuel, & ſans aucune interruption.

3°. Si on veut ſavoir à quelle hauteur 14 hommes ou

Digitized by Google

2 chevaux éleveroient ce poids en une heure, alors $m = 14 \times 25 = 2 \times 175 = 350$, $e = 12000$, & $E = \frac{me}{M} = 4{,}2$ pieds, c'eſt-à-dire, environ 4 pieds 2 pouces $\frac{1}{2}$.

4°. Enfin ſi on veut ſavoir quel poids 14 hommes ou 2 chevaux peuvent élever à la hauteur de 100 pieds, en une heure de temps, à l'aide d'une machine quelconque, on trouvera $M = 42000$ livres.

225. Il paroît par-là qu'*en ſe ſervant de la machine la plus parfaite, on perd d'un côté ce qu'on gagne de l'autre : On ne ſupplée à la force qu'aux dépens du temps & de l'eſpace :* Qu'*enfin l'effet des machines eſt néceſſairement limité par les circonſtances dans leſquelles on les met en uſage.* Ce qui n'empêche pas cependant que les machines ne ſoient très-utiles dans une infinité de cas.

Nous verrons dans la ſuite combien il en faut encore rabattre ſur tous ces calculs, où l'on ſuppoſe les machines dans un état de perfection, dont elles ne ſont pas ſuſceptibles, par la nature des matériaux qu'on eſt obligé d'employer dans leur conſtruction.

Des Machines en général.

226. On appelle *Machine* tout inſtrument propre à faciliter le mouvement des corps.

Nous ſuppoſerons d'abord que toutes les parties des Machines ſont dans un état parfait, qu'elles ſont ſans peſanteur, que celles qui doivent être inflexibles le ſont parfaitement, qu'elles ſont parfaitement polies, rondes quand il le faut, que les cordes ſont parfaitement flexibles, ſans épaiſſeur, &c. Nous examinerons dans la ſuite ces circonſtances.

227. Parmi les Machines il y en a cinq qu'on appelle *Simples*, ſavoir, *le Levier*, *la Poulie*, *le Tour*, *le Plan incliné*, & celle que M. Varignon a appellée *la Machine Funiculaire*. Elles s'appellent *ſimples*, parce qu'elles le ont en effet, & que leurs différentes combinaiſons ſervent à former toutes les autres machines qu'on appelle *compoſées*, & dont le nombre eſt infini.

Digitized by Google

228. *Dans les Machines on ne compare enſemble ordinairement que deux puiſſances à la fois :* Si j'ai un poids conſidérable à ſoulever, je le comparerai à la puiſſance appliquée à la machine pour le ſoulever, ou bien je le comparerai avec l'effort que ſupporte le crochet, l'appui, ou le point qui ſoutient toute la Machine : ou enfin je comparerai la puiſſance à l'effort de cet appui.

Des Machines ſimples.

Du Levier.

229. LE levier eſt une verge inflexible & ſans peſanteur, à deux points de laquelle ſont appliquées deux puiſſances qui font effort dans un même plan, tandis qu'un autre point (appellé *point d'appui*, *hypomoclion*, *point fixe*) ſe trouve appuyé ſur un point inébranlable, pour réſiſter à l'effort de ces deux puiſſances.

Cette machine eſt fort connue & fort en uſage pour ſoulever les fardeaux ; c'eſt elle qu'on appelle *Balance*, *Peſon*, *Romaine*, &c. ſuivant les différentes manieres dont on s'en ſert pour peſer les corps.

230. Il y a trois manieres de ſe ſervir du levier. Dans la premiere (fig. 23) le point d'appui D eſt entre les deux extrêmités A & B, dont l'une B ſert à porter ou ſoulever un fardeau P ; on applique une puiſſance p en A ſuivant une direction quelconque Ap, pour ſoutenir ce fardeau en équilibre ſur le point d'appui D.

Dans la ſeconde (fig. 24) le point d'appui eſt à une des extrémités D, & ayant attaché ou ſuſpendu un fardeau à un point quelconque B, on applique une puiſſance en A ſuivant une direction quelconque Ap, pour ſoutenir le fardeau en équilibre ſur le point D.

Dans la troiſieme (fig. 25.) le point d'appui eſt encore à une extrémité D, le fardeau à l'autre extrémité B, & la puiſſance eſt appliquée entre deux en A ſuivant une di-

Digitized by Google

rection quelconque A*p*, pour ſoulever le fardeau & le ſoutenir en équilibre.

231. On appelle *bras de levier* les parties DB, DA (fig. 23, 24, 25,) compriſes depuis le point d'appui, juſqu'à celui où ſont appliquées les puiſſances.

232. Toutes ces manieres reviennent à la même, parce qu'on peut regarder la puiſſance, le fardeau, & le point d'appui comme trois puiſſances P, *p*, R quelconques en équilibre, dont les directions paſſent par les points A, B, D.

233. THEOREME I. *Dans le levier la puiſſance eſt au poids en raiſon réciproque des perpendiculaires tirées du point d'appui* D, (*ou même d'un point quelconque* E *pris dans la direction de ſon effort*) *ſur leurs directions.*

Cette propoſition eſt évidente par ce que nous avons déja dit (213) : car il eſt clair (215) que puiſqu'on ſuppoſe l'équilibre dans le levier, il faut que les directions des trois puiſſances concourent en un même point C.

234. SCHOLIE I. La poſition du point C eſt ordinairement déterminée par celle de la puiſſance, & par celle du poids; car alors l'effort du point d'appui ſe dirige vers le concours de ces deux directions. S'il ſe trouve qu'un poids eſt ſuſpendu à un levier, ſon effort eſt dans une ligne verticale ou perpendiculaire à l'horizon; & ſi la puiſſance fait auſſi effort dans une ligne verticale, les trois directions ſont paralleles entr'elles. Elles peuvent encore être paralleles par d'autres raiſons, mais de quelque maniere que cela arrive, le Théorême ſubſiſte toujours; ſeulement on peut dans le cas du paralléliſme des directions, ſubſtituer au rapport des perpendiculaires, celui des bras de levier, parce que ces perpendiculaires tirées du point d'appui ſont alors ou confondues avec les bras, ſi les directions ſont en même temps perpendiculaires au levier, ou proportionnelles à ces bras, ſi les directions ſont obliques au levier : car à cauſe des triangles ſemblables DAK, DBH, (fig. 26) on aura DH : DK :: DB : DA. Or par le Théorême, la puiſſance eſt au poids, comme DH à DK; donc elles ſont auſſi comme les bras de levier DB, DA : c'eſt-à-

Digitized by Google

dire, réciproquement comme les bras auxquels on les a appliquées.

235. SCHOLIE II. Cette propriété du levier eſt encore indépendante de ſa figure ; parce que dans la démonſtration, il ne s'agit que des perpendiculaires tirées du point d'appui ſur les directions des deux puiſſances appliquées au levier.

236. SCHOLIE III. Il eſt évident (213) que ſi on veut connoître la charge que ſupporte le point d'appui, on trouvera qu'elle eſt à une des deux puiſſances quelconques, en raiſon réciproque des perpendiculaires tirées d'un point pris à diſcrétion dans la direction de la puiſſance qu'on ne compare pas, ſur les deux autres directions : car on peut regarder le point d'appui comme une des trois puiſſances néceſſaires à former l'équilibre.

237. SCHOLIE IV. *On voit aiſément que la balance eſt un levier dont le point d'appui ou celui de ſuſpenſion eſt préciſément au milieu, afin que ſes bras étant égaux, les poids égaux appliqués à leurs extrémités, & dont les directions ſont toujours perpendiculaires à l'horizon, tiennent auſſi le levier parallele à l'horizon.* Car puiſque tous les corps tendent à s'approcher du centre de la terre avec des efforts proportionnels à leurs maſſes ou poids (105), ſi deux poids ſont égaux, leurs efforts ſont égaux : & s'ils ſont ſuſpendus aux extrémités d'un levier dont le point d'appui eſt au milieu, ils tirent ces extrémités vers le centre de la terre avec des efforts égaux ; par conſéquent une de ces extrémités n'en doit pas approcher plutôt que l'autre : ſi donc le point d'appui eſt immobile, les deux extrémités doivent être immobiles, & également éloignées du centre de la terre, c'eſt-à-dire, dans une ligne parallele à l'horizon.

238. SCHOLIE V. Il en eſt de même pour le peſon ou la romaine. C'eſt un levier dont le point d'appui ou de ſuſpenſion eſt proche d'une de ſes extrémités, à laquelle on a ſuſpendu un poids conſtant, qui peut faire équilibre avec toutes ſortes de poids, pourvu qu'on les écarte du point d'appui vers l'autre extrémité, en ſorte que la diſtance du poids conſtant au point d'appui, ſoit à celle du poids in-

Digitized by Google

connu au même point d'appui, comme ce poids inconnu eſt au poids conſtant : Donc en meſurant la diſtance d'un poids quelconque au point de ſuſpenſion du peſon en équilibre, on trouve facilement la peſanteur de ce poids.

239. On ſe ſert auſſi dans le Nord de l'Europe d'une eſpece de peſon, qui n'eſt autre choſe qu'un levier chargé d'un poids fixé à une de ſes extrémités, & d'un baſſin ſuſpendu à l'autre extrémité : Ce levier eſt ſoutenu en équilibre par un anneau mobile, & qu'on écarte plus ou moins de l'extrémité chargée du poids fixe, que le corps placé dans le baſſin eſt plus ou moins peſant.

240. PROBLEME. *Deux poids ou puiſſances données étant appliquées à deux points donnés dans un levier, trouver la troiſieme puiſſance capable de faire équilibre, & le point du levier où il faut l'appliquer.*

Ce Problême peut avoir quatre cas. Car ou les directions de ces puiſſances ſont paralleles entr'elles, ou elles ſont obliques : & dans ces deux cas, ou les puiſſances données ſont toutes deux agiſſantes, ou l'une eſt agiſſante & l'autre réſiſtante.

I. Cas. Soient données deux puiſſances agiſſantes P, p, (fig. 27) aux extrémités A, B, d'un levier, & dont les directions AP, Bp, ſont paralleles : pour trouver le point d'appui D, auquel une puiſſance demandée R étant appliquée ſuivant la direction RD, retienne en équilibre les puiſſances P, p, il eſt clair 1°, que cette puiſſance R doit être égale à P$+p$. Car puiſque le levier eſt ſans peſanteur, la puiſſance R doit ſoutenir elle ſeule les deux poids P, p. Si donc on ſuppoſe que le point d'appui ſoit en D, on aura (234) P : p :: BD ou AB — AD : AD. Donc $p \times$ AB $- p \times$ AD $=$ P $\times$ AD, & en tranſpoſant $p \times$ AB $=$ P $\times$ AD $+ p \times$ AD, & diviſant, $\frac{p \times AB}{P+p} =$ AD; formule qui donne la poſition du point D. On eût trouvé par un ſemblable calcul BD $= \frac{P \times AB}{P+p}$.

241. II. Cas. Soient données les puiſſances P, R, l'une

Digitized by Google

appliquée en A à l'extrémité d'un levier indéfini AB; qu'elle tire ſuivant la direction AP, l'autre en R, qui repouſſe le levier dans la direction RD, parallele à AP, on demande le point de ce levier; où il faut appliquer une puiſſance p, qui faſſe équilibre; ſuppoſons que B ſoit le vrai point cherché, on aura donc R : P :: AB ou AD + DB : DB. Donc $R \times DB = P \times AD + P \times DB$: donc en tranſportant & diviſant $\frac{P \times AD}{R - P} = DB$. On eût trouvé par un ſemblable raiſonnement $AB = \frac{R \times AD}{R - P}$ & ſi on veut ſavoir la valeur de p, on aura $P : p :: DB$ ou $\frac{P \times AD}{R - P}$: AD. D'où on tirera $p = R - P$.

242. III. Cas. Soient données les puiſſances P, p (fig. 23) agiſſantes ſuivant les directions obliques Ap, BP, qui concourent au point C; prenez ſur l'une des deux comme CP, une ligne à volonté CI, & faites $P : p ::$ CI : CL. Par le point L menez LN parallele à CP, & par le point I menez IN parallele à Cp : par C & par leur point de concours N menez CN, qui (étant prolongée s'il le faut) rencontrera le levier au point D qu'on cherche, auquel il faut appliquer une puiſſance R, qui réſiſte dans la direction RD, & qui ſoit à la puiſſance P, comme CN à CI.

243. IV. Cas. Si une des deux puiſſances P (fig. 24) eſt agiſſante, & l'autre R réſiſtante, ayant pris de même CI à diſcrétion, faites P : R :: CI : CN, joignez les points N, I, & par le point C, menez CL parallele à NI, ce ſera la direction de la puiſſance cherchée, qui doit être à P, comme NI à CI.

De la Poulie.

244. La poulie eſt une roue KLH (fig. 28 & 29) de bois ou de métal mobile en D ſur un axe, *eſſieu* ou *goujon*, qui eſt un cylindre fixé dans la *chape* BD, qui embraſſe la poulie. Elle a dans l'épaiſſeur de ſa circonférence une *rainure* ou *gorge* pour recevoir une corde pKHP, qui en-

Digitized by Google

toure une partie de cette circonférence.

On l'appelle *poulie fixe* quand la chape eſt attachée à un point inébranlable ; & elle s'appelle *poulie mobile* quand la chape eſt attachée au fardeau qu'on veut enlever.

Quelquefois on fixe l'axe à la poulie ; mais les deux bouts de cet axe (qu'on appelle alors *les tourillons*) peuvent tourner librement dans des trous ronds pratiqués dans la chape.

245. THEOREME. *Dans la poulie les deux puiſſances en équilibre* P, p, *qui tirent la corde qui paſſe dans ſa rainure, ſont égales entr'elles.*

Car alors la direction CD de la puiſſance réſiſtante étant celle du poids ſuſpendu à la poulie, ou de l'effort fait ſur le crochet C qui retient la poulie, les deux autres puiſſances P, *p*, ſont entr'elles réciproquement comme les rayons DK, DH, perpendiculaires à leurs directions, c'eſt-à-dire, ſont égales entr'elles.

246. COROLL. I. *La tenſion de la partie* pK *de la corde eſt égale à celle de la partie* HP.

247. COROLL. II. *Si la poulie eſt fixe*, (fig. 28) *une puiſſance en* p *doit faire un effort égal à la peſanteur du poids* P *pour le tenir en équilibre.*

248. COROLL. III. La vîteſſe avec laquelle la puiſſance tireroit le poids, ſeroit égale à celle avec laquelle le poids monteroit.

249. COROLL. IV. *Une poulie fixe ne contribue d'elle-même en rien pour augmenter la puiſſance ; elle ſert cependant à en changer, comme on veut, les directions. C'eſt ainſi que par ſon moyen on peut ſubſtituer des poids à leur place*, ce qui eſt très-commode. Car, par exemple, un homme qui dans un travail continuel ne peut employer qu'environ 25 livres de forces, pour enlever un fardeau ſuſpendu en l'air, y peut employer tout le poids de ſon corps, en changeant par le moyen d'une poulie la direction de haut en bas, en une autre de bas en haut. La poulie contribue encore à diminuer les frottements des cordes.

250. COROLL. V. *Si la poulie eſt mobile*, (fig. 29) la

Digitized by Google

corde doit être fixe à une de ſes extrémités comme en P. Et alors il eſt clair que *la puiſſance* p *qui attire le fardeau avec la poulie, n'en ſoutient qu'une partie ; & que cette puiſſance eſt au poids, comme* HG *à* HF. Mais les Triangles rectangles KDG, HKF ſont ſemblables, à cauſe des lignes DK, HF, qui étant perpendiculaires à KC, ſont par conſéquent paralleles, d'où il ſuit que l'angle DKG = KHF, (Elem. 433) : d'ailleurs HG = KG (Elem. 448) : Donc KG ou HG : HF :: KD : HK. Donc on peut dire auſſi que *dans la poulie mobile, la puiſſance eſt au poids, comme le demi-diametre de la poulie, eſt à la ſoutendante de l'arc embraſſé par la corde.*

Cette même analogie convient à la poulie fixe, lorſqu'on veut comparer ſa charge à l'une des deux puiſſances, puiſque la puiſſance *p* eſt à la puiſſance P qui repréſente la charge de la poulie, comme HG à HF, & par conſéquent comme HD à HK :

251. COROLL. VI. *Si les directions des cordons* pK, HP *ſont paralleles, la puiſſance eſt au poids comme* 1 *à* 2 ; car alors KH eſt confondue avec un diametre.

252. COROLL. VII. *La viteſſe avec laquelle la puiſſance attire le poids, eſt à celle avec laquelle le poids avance, comme* KH *à* KD ; *ou ſi les directions ſont paralleles, comme* 2 *à* 1.

253. SCHOLIE. La démonſtration précédente ſuppoſe que les deux cordons HP, K*p* font un angle égal PCD, *p*CD de part & d'autre de la droite DR, ce qui eſt le cas le plus ordinaire : mais comme il eſt poſſible que ces cordons ſoient autrement diſpoſés, on peut faire une propoſition plus générale, en conſidérant l'effet d'une puiſſance appliquée à un des cordons quelconque comme K*p*, de quelque façon que l'autre cordon HP ſoit dirigé. Je dis donc que *ſi en tirant le cordon* Kp *qui enveloppe la poulie mobile, on fait décrire au centre* D *de cette poulie une droite quelconque* DR, *oblique à la direction* Kp *du cordon que l'on tire, l'effort abſolu employé à tirer le cordon, eſt à l'effort relatif qui fait avancer le centre de la poulie, comme le ſinus total eſt au coſinus de l'obliquité de la route du centre par rapport à la di-*

Digitized by Google

rection ſuivant laquelle le cordon K p *eſt tendu.* Car ſi par le centre D on tire DS parallele, & DK perpendiculaire à K *p* ; & ſi par un point quelconque S pris ſur DS on tire S *p* perpendiculaire à K *p*, & SR perpendiculaire à DR, il eſt évident que ſi DS ou ſon égale K *p* exprime l'effort abſolu de la puiſſance appliquée au cordon *p* K, cet effort peut être décompoſé en deux, l'un exprimé par SR qui ne contribue en rien au mouvement du centre de D vers R, & l'autre exprimé par DR qui produit ſeul le mouvement du centre de D vers R : donc DR exprime l'effort relatif de la puiſſance appliquée en *p*. Or (Elem. 747) dans le triangle rectangle DSR, on a DS eſt à DR, comme le ſinus total eſt au coſinus de l'angle SDR. Et cette analogie convient aux droites HD & HG à cauſe du triangle rectangle HDG, égal au triangle KDG, & ſemblable au triangle DSR : puiſque (183) ſi HD, KD repréſentent les efforts abſolus des puiſſances *p*, P, leurs efforts relatifs ſeront repréſentés par HG & KG.

Du Tour.

254. On entend ici par *Tour*, un cylindre ou *Tambour* mobile ſur ſon axe, ou ſur deux tourillons ou pivots ronds & polis, fixés à ſes deux extrémités, & engagés dans deux trous, *fentes* ou *crapaudines*, qui le ſupportent, & qui le tiennent arrêté. On attache à ce cylindre une corde, qui eſt elle-même attachée à un fardeau, afin de l'attirer vers la Machine, à meſure que la corde s'entortille autour du tambour, qu'on fait tourner par le moyen d'une manivelle, d'une roue, ou de pluſieurs leviers engagés dans des trous faits à travers du cylindre. C'eſt ainſi que ſont conſtruites les machines qui ſervent à tirer les pierres des carrieres aux environs de Paris, à tirer de l'eau des puits, &c. Quand le tambour eſt poſé parallélement à l'horizon, le tour s'appelle *Treuil*, & quand il lui eſt perpendiculaire, il s'appelle *Cabeſtan*.

255. THEOREME. *Dans le Tour, la puiſſance appliquée à*

Digitized by Google

la roue ou à la manivelle eſt au poids qu'on attire & qui reſte en équilibre, comme le rayon du tambour, au rayon de la roue, ou de la manivelle, ou à la longueur du levier priſe depuis l'axe du cylindre.

DEM. DF (fig. 30) repréſente un des montants immobiles : D eſt la fente où eſt engagé le pivot, DH le rayon du tambour ou cylindre, & DK celui de la roue ou manivelle : HP eſt la corde qui ſe roule ſur le tambour pour attirer le poids P, *p* K eſt la direction d'une puiſſance appliquée en K, pour faire tourner la roue KES, ou pour faire tourner le cylindre par le moyen du levier DK. Or il eſt clair que ſi on prolonge l'axe du montant DF, la direction de la corde HP, & celle de la puiſſance *p*, elles iront concourir en cas d'équilibre au point C, & (213) que le poids P ſera à la puiſſance *p*, comme DK à DH.

256. COROLL. I. Les circonférences étant entr'elles comme les rayons (Elem. 582) *dans le tour armé d'une roue, la puiſſance eſt au poids comme le contour du tambour eſt au contour de la roue.*

257. COROLL. II. Dans le tour armé d'une roue, on peut ſuppoſer la puiſſance appliquée à une corde qui embraſſe la roue, & cette corde tirée dans le plan de cette roue & dans une direction quelconque, laquelle eſt toujours une Tangente à la roue, au point où la corde commence à la quitter. *On peut donc ſuppoſer la puiſſance appliquée à un point quelconque de la roue ſans rien changer à l'effet, pourvu que la direction de cette puiſſance ſoit une tangente à la roue en ce point, & qu'elle tende à faire tourner la roue dans le même ſens.*

258. COROLL. III. Le chemin parcouru par le poids étant égal à la quantité dont la corde s'entortille ſur le tambour, *la puiſſance a une vîteſſe qui eſt à celle du poids, comme le rayon ou le contour du tambour, au rayon ou contour de la roue.*

259. REM. Il eſt bon d'obſerver ici que la démonſtration de cette analogie ſuppoſe que la direction HP du poids & la direction K*p* de la puiſſance ſont dans un même plan

Digitized by Google

plan avec la direction DF de la réſiſtance des appuis, parce qu'on a fait voir (76) que cela doit être, pour que l'équilibre ſubſiſte dans les forces réduites à trois. Or dans cette machine il y a toujours deux appuis, inégalement chargés ſelon la poſition de la corde par rapport à un des bouts du tambour, & les deux directions des réſiſtances de ces appuis, ſont néceſſairement dans un plan différent de celui qui paſſeroit par la direction PH du poids, & par le point de la roue où la puiſſance agiſſante eſt appliquée. Mais il eſt aiſé de faire voir que l'analogie précédente entre la puiſſance & le poids ſubſiſte néanmoins; ce n'eſt que l'analogie entre la puiſſance & la charge ou réſiſtance des appuis, qu'on ne peut démontrer par le rapport des perpendiculaires tirées de H ſur les directions CD, C*p*. Car ſoit AGL (*fig.* 31) le tambour placé horizontalement, IK ſon axe, D le centre de la roue, DH ſon rayon; il eſt clair que ſi on imagine que le poids Q ſoit appliqué au point A de la ſurface du tambour, lequel point A eſt néceſſairement dans le même niveau que l'axe IK, & ſi l'on tire une droite horizontale AH qui tende au point H de la circonférence de la roue qui eſt dans le même niveau que l'axe IK, il eſt clair que cette droite AH coupera l'axe du tambour en quelque point comme F, & qu'à cauſe de l'aſſemblage & de la ſolidité des parties du tour, la puiſſance appliquée en H dans le ſens d'une tangente à la roue exerce ſon effort par rapport au poids appliqué en A, comme ſi H & A étoient les bouts d'un levier horizontal dont le point d'appui fût en F & les deux directions AQ, H*p* paralleles. Or à cauſe de l'équilibre, la puiſſance en H eſt à ſon effet en A, comme FA eſt à FH, & à cauſe des triangles rectangles ſemblables ABF, FDH, on a FA: FH :: AB : DH.

260. A l'égard de la charge des appuis, quoiqu'il ſoit ordinairement moins important de la calculer, on peut trouver celle que cauſe l'action des deux puiſſances P, *p*, en faiſant abſtraction du poids du tambour & de la roue. Car après en avoir trouvé la quantité abſolue par le moyen d'une

Digitized by Google

droite HA (fig. 30) tirée du point H perpendiculairement à C*p*, comme si les deux appuis étoient réunis au point D, dans le plan de la roue du tour, on peut considérer cette quantité comme un poids suspendu au point F (fig. 31) d'un levier IK dont les extrêmités sont aux points I, K où s'exercent les résistances des appuis, la quantité absolue de la charge est donc partagée en deux parties qui sont entr'elles en raison réciproque des bras de levier FK, FI.

Du Plan incliné.

261. Lorsqu'on retient un corps C (fig. 32) sur un plan incliné AB, les deux forces agissantes qui forment l'équilibre, sont 1°, la pesanteur absolue de ce corps C, dont la direction PC est perpendiculaire à l'horizon, & qui tend à pousser le corps en embas. 2°, La puissance *p* qui retire ce corps suivant une direction quelconque C*p*. 3°, La résistante CR est une perpendiculaire tirée du centre C du corps sur le plan, parce que c'est suivant cette direction que le plan incliné soutient le corps C.

262. THEOREME. *La puissance* p *qui retient un poids en équilibre sur un plan incliné, est à ce poids, comme le sinus de l'angle de l'inclinaison du plan, au sinus de complément de l'inclinaison de la direction de la puissance* p *sur le plan incliné.*

DEM. 1°, Si on mene CI parallele au plan incliné, l'angle DCI sera droit, & l'angle IC*p* sera l'inclinaison de la direction C*p* par rapport à CI, ou par rapport au plan incliné: donc l'angle DCH sera le complément de cette inclinaison. 2°, Les Triangles DCK, AKG sont semblables; donc l'angle KAG de l'inclinaison du plan est égal à l'angle DCK. 3°, Si on prend DC pour Sinus total, DK sera le sinus de l'angle DCK, & DH celui de l'angle DCH. Or il est clair (213) que *p*:P:: DK: DH. Donc *p* est à P, comme le sinus de l'inclinaison du plan, est au sinus du complément de l'angle *p*CI.

263. COROLL. I. *Si* Cp *étoit parallele au plan incliné, la puissance seroit au poids, comme le sinus de l'angle d'inclinaison au sinus total, ou comme la hauteur* BF *du plan incliné, à sa longueur* AB.

Digitized by Google

264. COROLL. II. Si C*p* étoit parallele à l'horizon, l'angle *p*CD ſeroit le complément de l'angle DCK ou de l'inclinaiſon du plan, & alors on auroit, La puiſſance eſt au poids, comme le ſinus de l'inclinaiſon du plan, à ſon ſinus de complément: or ſi on prend AB pour rayon, BF ſera le ſinus de l'inclinaiſon, & AF ſon ſinus de complément. Donc *quand la direction de la puiſſance* p *eſt horizontale*, p: P :: *comme la hauteur du plan incliné à la longueur de ſa baſe.*

265. COROLL. III. Si ſur IC on fait l'angle NCI = IC*p*, la même puiſſance appliquée en N, tiendra le Corps en équilibre comme qu'en *p*.

266. COROLL. IV. *Donc quand l'inclinaiſon du plan eſt conſtante, plus la direction de la puiſſance eſt oblique par rapport au plan incliné, plus il lui faut de force pour garder l'équilibre au poids.*

267. COROLL. V. *Plus l'inclinaiſon du plan diminue, l'angle de la direction de la puiſſance avec le plan reſtant le même, moins il faut de force en* p, *pour faire garder l'équilibre au poids* P.

REM. Voyez encore ce qui eſt dit du plan incliné dans l'article qui traite des propriétés du centre de gravité. n°. 398 & ſuivants.

Des Poids ſoutenus par des cordes.

268. Tout ce que nous avons dit de l'équilibre qui ſe fait ſuivant les côtés & la Diagonale d'un ou de pluſieurs Parallélogrammes, qui expriment les directions & les forces des puiſſances, ſe peut appliquer très-facilement à des cordes, qui étant tirées en différents ſens, reſtent immobiles. Par exemple, on peut repréſenter l'équilibre qui eſt entre les puiſſances *p*C, PC, RC, (fig. 1.) en ſuppoſant que le point ou nœud commun C, eſt tiré de C en A par une corde CA avec une force exprimée par *p*C, & en même-temps de C en D par une autre corde CD avec une force PC, tandis qu'une troiſieme corde CF le tire de C en F avec une force exprimée par CR; ou ſi on ſuppoſe que le point C (fig. 4) tiré par trois cordes placées dans différents plans, & dont les droites *p*C, QC, PC repréſentent les

Digitized by Google

directions & les forces qui ſont appliquées aux cordes, reſte en équilibre, parce qu'il ſe trouve contretiré par une quatrieme corde F C, égale & directement oppoſée à C B, qui exprime (89) la force compoſée des trois forces pC, QC, PC : Ces cordes ainſi diſpoſées, ou plus généralement, tant de cordes qu'on voudra qui tirent un même point ou pluſieurs points, en différents ſens ou dans des plans différents, & qui reſtent en équilibre, compoſent *la Machine funiculaire.*

269. Si l'on ſuppoſe un poids B (fig. 33) attaché à une corde C B, laquelle eſt nouée à une autre corde P Cp, dont chaque bout eſt accroché en P, p, ce poids ſera ſoutenu par la machine funiculaire, parce que le crochet p tirera le bout p C de la corde de C en p: le crochet P tirera le bout P C de C en P, tandis que le poids B tire le nœud de C en B.

Il eſt clair que la force que chaque crochet employe pour ſoutenir ſa partie du poids, eſt égale à la tenſion du cordon compris depuis ce crochet juſqu'au nœud.

270. THEOREME. *Les tenſions de deux des trois cordes qui compoſent la machine funiculaire ſont entr'elles réciproquement comme les perpendiculaires tirées d'un point quelconque de la troiſieme ſur les deux autres.*

271. COROLL. I. *Chaque crochet ſoutient des parties du poids qui ſont en raiſon réciproque des perpendiculaires* DH, DK.

272. COROLL. II. *Une corde inclinée ou parallele à l'horizon, & qui eſt retenue par deux points fixes, ne peut jamais être parfaitement en ligne droite, avec quelque force qu'elle ſoit bandée.* Car la peſanteur de cette corde fait l'effet de pluſieurs petits poids ſuſpendus à chaque point de la corde. Or ſi une corde ſans peſanteur eſt tendue, les deux crochets la tirant également chacun de ſon côté, la feront reſter en ligne droite & en équilibre : mais ſi on ſuſpend un poids quelconque vers le milieu de cette corde, il rompra l'équilibre, & fera ployer la corde plus ou moins ſuivant ſa peſanteur, & la tenſion de la corde.

Il en eſt de même de preſque tous les corps comme des

Digitized by Google

poutres, des barres de fer, &c. qui ſont toujours un peu courbées vers le milieu, lorſqu'elles ſont poſées ſur les deux bouts parallélement à l'horizon.

273. REMARQUE. La courbe ſuivant laquelle ſe ploient les corps flexibles attachés à deux points qui ne ſont pas dans une même ligne à plomb, s'appelle *la chaînette*: on en peut voir la conſtruction & les propriétés dans les Journaux de Leipſick année 1691. p. 274. dans l'analyſe démontrée du P. Reyneau, tome 2. page 389. & dans les Tranſactions Philoſophiques, N. 231.

Des Machines compoſées.

274. QUAND pluſieurs machines ſimples ſont réunies pour produire un certain effet, leur aſſemblage s'appelle *une Machine compoſée.*

L'effet E d'une machine ſimple eſt d'augmenter la puiſſance p qui lui eſt appliquée: Si cet effet E eſt appliqué à une autre machine ſimple pour lui ſervir de puiſſance, la puiſſance p eſt encore d'autant plus augmentée, que l'effet de chaque machine ſimple en particulier eſt plus grand.

Soit un levier AB (fig. 34) dont l'appui eſt en D, ſoit en A une puiſſance p, qui faiſant effort contre le poids P, ne le puiſſe mettre en équilibre avec ce ſeul levier AB, mais qui le puiſſe à l'aide d'un autre levier EA, dont l'appui eſt en C, parce que la puiſſance p appliquée en E, & agiſſant ſuivant pF, fait un plus grand effort pour abaiſſer le bras de levier AD, qu'elle ne la faiſoit lorſqu'elle étoit appliquée immédiatement en A. Or l'effort qu'elle fait en A étant (233) à la puiſſance p, comme EC à CA, il ſera $= \frac{EC \times p}{CA}$. Et puiſque cet effort agit ſur le levier AB, en ſorte que le poids P eſt en équilibre, on aura $\frac{EC \times p}{CA} : P :: DB : DA$. Donc $\frac{DA \times EC \times p}{CA} = P \times DB$, & en ôtant la fraction, $DA \times EC \times p = P \times DB \times CA$, & réduiſant en proportion, $p : P :: DB \times CA : DA \times EC$.

Et c'eſt l'analogie d'une machine compoſée de deux leviers.

275. D'où il ſuit que *dans une machine compoſée, dont les pieces agiſſent les unes ſur les autres, la puiſſance eſt à l'effet, en raiſon compoſée des rapports de chaque Machine ſimple, dont l'aſſemblage forme la machine compoſée.*

276. REMARQUE. La méthode de compoſer ces rapports eſt plus abrégée dans le calcul des machines dont nous allons parler; mais elle eſt fondée ſur la précédente. On déſigne par des lettres l'effet de chaque machine, & on multiplie par ordre les termes de leurs analogies: on diviſe enſuite par ces lettres la premiere raiſon de l'analogie compoſée qui en réſulte, & cette premiere raiſon devient ſimple. Par exemple, ayant appellé E l'effet du premier levier, on aura $p : E :: CA : EC$. Enſuite $E : P :: DB : DA$: donc en multipliant par ordre $p \times E : P \times E :: CA \times DB : EC \times DA$: & diviſant la premiere raiſon par E, ce qui ne change pas le rapport (Elem. 296) on aura $p : P :: CA \times DB : EC \times DA$.

Lorſque les pieces d'une machine n'agiſſent pas les unes ſur les autres, mais qu'elles partagent entr'elles le poids: alors la puiſſance eſt au poids, comme la ſomme des antécédents de chaque raiſon eſt à la ſomme des conſéquents. Telles ſont les mouffles.

Nous n'entrerons pas dans un grand détail des machines compoſées, nous en expliquerons ſeulement les plus ordinaires, ſavoir le coin, les rouages, les vis, & les poulies mouflées.

Du Coin.

277. Le coin eſt compté ordinairement parmi les machines ſimples: on va voir cependant qu'il ne fait ſon effet, que comme une machine compoſée de deux plans inclinés, & de deux leviers.

C'eſt une eſpece de priſme triangulaire ABD (fig. 37) qu'on ſuppoſe iſoſcele, c'eſt-à-dire, tel que ſes faces AD, BD ſoient égales; il ſert à ſoulever les fardeaux, & ſur-tout à fendre du bois en introduiſant ſon taillant dans une fente déja commencée.

Digitized by Google

278. Lorſqu'on applique une puiſſance P ſur la tête A B du coin, les deux côtés de la fente ſe ſéparent, & preſſent chacune des faces A D, B D du coin à cauſe de la réſiſtance du bois; or quoiqu'ils touchent ces faces en un grand nombre de points, on peut cependant ſuppoſer que leurs efforts ſont réunis aux ſeuls points I, K, & qu'ils agiſſent dans les directions I C, K C perpendiculaires à ces faces. Car les fibres du bois ſont fort élaſtiques, & en même-temps adhérentes les unes aux autres, enſorte qu'elles s'allongent à meſure qu'on les tire, & qu'elles ne ſe ſéparent que quand la force avec laquelle on les tire ſurpaſſe celle de leur reſſort. Par l'effort du coin les fibres qui ſont dans la ligne M H ſont d'autant plus allongées qu'elles ſont plus près de l'extrêmité M de ce qui reſte à fendre; & par leur reſſort, elles ſont d'autant plus de réſiſtance à leur ſéparation, qu'elles ſont plus allongées. Cependant ſi le morceau de bois eſt long, cet allongement ne s'étend dans la ligne M H que juſqu'à un certain point comme Q au-delà duquel l'effort du coin ne ſe fait plus ſentir: Or quoique la longueur de M Q qui exprime le nombre des fibres allongées ſoit inconnue, auſſi-bien que la quantité abſolue de la réſiſtance compoſée de la ſomme des réſiſtances de chaque fibre, parce que tout cela dépend de la nature particuliere du bois; cependant pour connoître à peu près le rapport de l'action de la puiſſance P à ſon effet, on peut ſuppoſer qu'il n'y a qu'une ſeule fibre vers N, entre M & Q, dont la réſiſtance équivaut à la ſomme de toutes les autres; ou, ce qui revient au même, on peut ſuppoſer que le bois étant réellement fendu depuis M juſqu'en Q, il y a un lien en N dont la force eſt égale à la ſomme de toutes les tenſions des fibres depuis M juſqu'en Q, & alors il eſt évident que pour rompre ce lien, il faut que les faces du coin agiſſent ſur les points I, K, comme ſur des bouts de levier I N Q, K N Q dont le point d'appui eſt en Q, & dont les bras ſont N Q, I Q, & N Q, K Q; ce qui ſe fait par la décompoſition de la puiſſance P qui agit dans la direction P C, en deux efforts égaux C I, C K perpendiculaires aux côtés A M, B M de la fente. Cela poſé....

279. THEOR. VI. *Si une puiſſance* P *appliquée ſur la tête* AB, *d'un coin iſoſcele, eſt en équilibre avec les parties d'un morceau de bois dans lequel il eſt engagé ; cette puiſſance* P *eſt à la réſiſtance* R *du bois, comme* AB×QN *à* 2AD×IQ.

Pour démontrer cette propoſition nous conſidérerons qu'à cauſe de l'égalité des parties de la figure de part & d'autre de la ligne PH, nous pouvons déterminer ſeulement l'effort de la moitié PAD du coin ſur la partie IH, puis ayant doublé tous les termes, nous aurons tout l'effort du coin entier, ſur toute la piece de bois.

Il eſt évident que ſi du point D on tire DE, DF paralleles à CK, CI, les côtés égaux CE, CF repréſenteront les efforts de la réſiſtance du bois, & DC celui de la puiſſance P. Donc $\frac{1}{2}$ DC exprimera $\frac{1}{2}$ P ou l'effort fait ſur la partie IH, & CE la réſiſtance de cette partie. Or 1°, les triangles CED, ADB ſont ſemblables ; car ils ſont iſoſceles à cauſe de l'égalité des faces du coin, & de celle des forces CE, CF ou ED, & que les triangles rectangles APD, DIC étant ſemblables par la conſtruction, l'angle ECD=BAD. On aura donc, CD : CE :: AB : AD. Et en prenant la moitié du premier & du troiſieme terme, $\frac{1}{2}$ P : CE :: AP : AD. Mais à cauſe du levier, CE : $\frac{1}{2}$ R :: QN : IQ. Donc en compoſant, (276) $\frac{1}{2}$ P : $\frac{1}{2}$ R :: AP×QN : AD×IQ ; & en doublant tous les termes P : R :: 2AP×QN ou AB×QN : 2AD×IQ.

280. REMARQUE I. Lorſqu'on fait ſauter un éclat avec un coin, ou qu'on ſouleve un fardeau, ce n'eſt pas que ce coin ne faſſe un effort égal des deux côtés de ſes faces, & qu'il n'y ſente une réſiſtance égale : mais c'eſt qu'à cauſe de la foibleſſe de la partie enlevée, la réaction de celle qui reſte immobile, ſe joint à l'action du coin ſur celle-là, & contribue à produire cet effet.

281. REMARQUE II. C'eſt à l'effet du coin qu'on doit rapporter la force des clous, des aiguilles, des épées, &c. pour percer ; celle des ciſeaux, couteaux, coignées, ſabres, raſoirs, &c. pour couper.

Digitized by Google

Remarques sur la force de la percussion.

282. Nous avons supposé jusqu'ici que les puissances appliquées aux machines pouvoient s'exprimer par des poids (249): mais cette supposition ne peut avoir lieu lorsqu'on employe la force de percussion, soit en faisant tomber un corps sur un bout de levier, soit en supposant qu'il soit frappé par un corps mû uniformément. La force de percussion produite par la rencontre d'un corps pesant n'est pas comparable à celle de la pression que ce corps peut faire par son poids seulement; car la force étant égale au produit de la masse par la vîtesse (59) celle d'un corps pesant en repos, ne peut être que le produit de sa masse m, par une vîtesse infiniment petite $\frac{u}{\infty}$. Elle peut donc s'exprimer par $\frac{mu}{\infty}$, au lieu qu'un corps qui tombe, ou qui se meut uniformément a une vîtesse finie, & sa force est $= mu$.

Il ne faut donc pas s'étonner de ce qu'en frappant légérement la tête d'un clou à demi-enfoncé dans du bois, on le fait entrer plus facilement, que si on posoit doucement sur cette tête un poids de 1000 livres.

283. A l'égard de la comparaison des forces de percussion produites l'une par un mouvement uniforme, l'autre par un mouvement uniformément accéléré; il est évident (96) qu'en supposant les masses égales, ces forces sont égales aussi, si l'espace parcouru par le mouvement uniforme depuis le commencement du mouvement uniformément accéléré, est double de celui qui a été parcouru par ce mouvement accéléré.

Des Rouages.

284. On appelle *Rouage* une machine ou une partie de machine composée, où se trouve un assemblage de plusieurs roues divisées & entaillées en parties égales, dont celles qui sont saillantes s'appellent *Dents*. Chaque roue est fixée à un axe ou tour mobile sur des pivots; cet axe est lui-même ou divisé en dents égales, & s'appelle *Pignon* de

Digitized by Google

la roue, ou bien il eſt compoſé de petits cylindres, ou *Fuſeaux* paralleles, & diſpoſés à égales diſtances autour de l'axe des pivots, & alors on l'appelle *Lanterne*. La premiere piece d'un rouage n'eſt pas ordinairement une roue dentée: c'eſt un tour ſimple, ou une manivelle, dont le pignon ou la lanterne engrenne dans les dents d'une grande roue, qui porte elle-même un pignon ou une lanterne engrenée dans les dents d'une autre roue, & ainſi de ſuite juſqu'à la derniere roue, qui n'a pas de pignon; mais ſeulement un tambour, ſur lequel s'entortille une corde, qui attire un fardeau. Voilà en gros l'idée de cette machine.

285. THEOR. *La puiſſance* p *appliquée à la manivelle d'un rouage, eſt au poids* P *attiré par la corde, comme le produit des rayons de chaque pignon ou lanterne & du tambour, eſt au produit des rayons de chaque roue & de la manivelle.*

DEM. Chaque roue avec ſon pignon n'eſt autre choſe qu'un treuil. Suppoſons un rouage compoſé d'une manivelle dont le rayon ſoit D, & de deux roues dont les rayons ſoient d, δ, que le rayon du pignon de la manivelle ſoit R, celui de la premiere roue r, celui de la ſeconde ρ. Soit E l'effet de la manivelle & de ſon pignon, e l'effet de la premiere roue & de ſon pignon, P qui eſt le poids attiré ſera l'effet de la ſeconde roue & de ſon tambour: & on aura (255) ces trois analogies $p : E :: R : D$..... $E : e :: r : d$ ..... $e : P :: \rho : \delta$. Donc en compoſant (276) $p : P :: Rr\rho : Dd\delta$.

286. COROLL. I. *Plus il y aura de roues, plus l'effet ſera grand, toutes choſes d'ailleurs égales.*

287. COROLL. II. *Plus les pignons ſeront petits en comparaiſon des roues, plus la machine aura de force*: le calcul en eſt facile. Si après avoir pris toutes les largeurs des roues & des pignons, on trouve $D = 10$, $d = 12$, $\delta = 15$ & $R = 2$, $r = 3$, $\rho = 3$, & ſi $p = 50$ livres, on aura $P = \frac{pDd\delta}{Rr\rho} = 5000$ livres. Mais ſi on eût trouvé $D = 15$, $d = 18$, $\delta = 20$; & $R = 1$, $r = 1\frac{1}{2}$, $\rho = 2$, p étant toujours de 50 livres; on auroit eu $P = 90000$ livres.

Digitized by Google

288. THEOREME. *Dans un rouage en mouvement, le nombre des tours de manivelle eſt à celui des tours de la premiere roue, & en général le nombre des tours d'une roue quelconque* A, *eſt au nombre des tours de la roue* B *à qui elle donne le mouvement; comme le nombre des dents de la roue* B, *au nombre des dents du pignon ou des fuſeaux de la lanterne de la roue* A.

DEM. Tandis que la roue A fait un tour, ſon pignon n'en fait qu'un; mais il ne fait faire à la roue B qu'une partie de révolution, qui eſt d'autant plus petite, que le nombre des dents du pignon eſt plus petit par rapport au nombre des dents de la roue B. Donc le mouvement de révolution de la roue A, eſt d'autant plus grand que le mouvement de révolution de la roue B, que le nombre des dents de cette roue B eſt plus grand que le nombre des dents du pignon de la roue A.

289. COROLL. I. Puiſque le nombre des dents de chaque roue compoſe ſa circonférence, & que ces dents ſont égales; on peut ſubſtituer au rapport précédent celui des circonférences, ou même celui des rayons.

290. COROLL. II. *Le nombre des tours de manivelle eſt à celui des tours du tambour, comme le produit du nombre des dents ou de la circonférence ou des rayons de chaque roue, eſt au produit du nombre des dents ou des contours ou des rayons de chaque pignon.* Car ſi on appelle c, x les contours ou le nombre des dents des deux roues; L, l, les contours ou le nombre des dents des deux pignons; N, n, v le nombre des révolutions de la manivelle & de chaque roue, & par conſéquent celui de leurs pignons; on aura toujours (258) $N : n :: c : L$, & $n : v :: x : l$. Donc, $N : v :: cx : Ll$.

291. & 292. REM. Ceci nous conduit à quelques pratiques de calcul utiles dans les arts où l'on employe les rouages, comme dans l'horlogerie.

I. Dans un rouage en mouvement, un pignon peut mener une roue, ou une roue peut mener un pignon, ſelon que la force motrice eſt communiquée à la roue par le pignon, ou au pignon par la roue. Dans ces deux cas: P*endant une révolution entiere de la premiere piece qui mene toutes les autres,*

Digitized by Google

le mouvement de révolution de la derniere piece menée eſt exprimé par le produit des fractions dont chaque numérateur eſt le nombre de dents de chaque piece qui mene, & chaque dénominateur eſt le nombre de dents de chaque piece menée. Car ſoit D le nombre des dents d'une premiere piece qui mene, ſoit N le mouvement de révolution d'une premiere piece menée dont d ſoit le nombre des dents : tandis que la piece qui mene fait une révolution, on a (288) $I : N :: d : D$ donc $N = \frac{DI}{d}$: & ſi l'axe de cette premiere piece menée, porte une autre piece, dont le nombre de dents ſoit B, laquelle ſerve à mener une ſeconde piece dont le nombre des dents ſoit b, ſi on appelle n le mouvement de révolution de cette ſeconde piece menée, on aura (288) N ou $\frac{DI}{d} : n :: b : B$: donc $n = \frac{BDI}{bd} = \frac{B}{b} \times \frac{DI}{d}$ & ainſi de ſuite. Si, par exemple, on a un rouage compoſé d'une roue de 48 dents qui mene un pignon de 8, à l'axe duquel eſt fixée une roue de 40 dents, qui mene un pignon de 6, lequel porte ſur ſon axe une roue de 36 dents, engrenée dans un pignon de 6, auquel ſoit fixé un tambour, ou une roue de rencontre ; le nombre de tours que fait le tambour, pendant que la premiere roue en fait un, eſt $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = 240$.

293. III. D'où il ſuit, qu'on peut faire faire le même nombre de tours à une roue de rencontre ou à un tambour, en employant des roues & des pignons, dont les nombres de dents ſoient tous différents de ceux d'un autre rouage, pourvu que les fractions qui ſervent à exprimer ces roues avec leurs pignons, faſſent un même produit : Ainſi $\frac{64}{10} \times \frac{50}{8} \times \frac{36}{6} = 240$ exprime un rouage, qui fait le même effet que le précédent.

294. IV. De ce que $\frac{48}{8} \times \frac{40}{6} \times \frac{36}{6} = \frac{48 \times 40 \times 36}{8 \times 6 \times 6}$, & qu'en quelque ordre qu'on mette les termes du numérateur, & ceux du dénominateur, on aura (Elem. 45) toujours la même valeur, il ſuit qu'abſolument parlant on peut donner à une des roues priſes à volonté dans le numérateur, celui

Digitized by Google

des pignons qu'on voudra prendre dans le dénominateur ; & que toutes les roues & pignons étant ainſi employés, le rouage produira le même effet. Mais cela n'eſt pas entiérement arbitraire dans la pratique, par la proportion qu'il faut donner à ces pieces, ſuivant la matiere qu'on employe à les faire, & ſelon le volume qu'on veut donner à la machine ; ce que l'expérience apprend aux artiſtes.

295. V. Etant donné le nombre des roues & pignons par leſquels on veut faire faire à un tambour, ou à une roue de rencontre, un certain nombre de tours donnés, tandis que la roue à laquelle la puiſſance motrice eſt appliquée n'en fait qu'un, pour trouver le nombre des dents de ces roues & de leurs pignons, on peut ſuivre cette regle, qui eſt fort aiſée dans la pratique : ſoit propoſé, par exemple, de faire faire 3600 tours au tambour, par le moyen de 4 roues & de 4 pignons. *Prenez tous les nombres premiers qui ſont les diviſeurs du nombre des tours donnés :* Ainſi 2, 2, 2, 2, 3, 3, 5, 5 ſont ceux de 3600. *Diſtribuez ces diviſeurs en tel ordre que vous voudrez, pour en faire autant de parts que vous avez de roues à employer.* Ainſi je fais les quatre parts 2, 2; 2, 3; 2, 5; 3, 5. *Du produit de chacun des nombres qui ſont chaque part, faites autant de numérateurs de fractions à chacune deſquelles vous mettrez 1 pour dénominateur.* J'ai donc $\frac{4}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{10}{1}$, $\frac{15}{1}$. *Multipliez chacun des deux termes de chaque fraction par tel nombre entier que vous voudrez, mais qui exprime le nombre des dents que vous voulez donner à vos pignons.* Ainſi je fais $\frac{4}{1}\times 7 = \frac{28}{7}$, $\frac{6}{1}\times 8 = \frac{48}{8}$, $\frac{10}{1}\times 6 = \frac{60}{6}$, $\frac{15}{1}\times 5 = \frac{75}{5}$. *Enfin faites une fraction compoſée du produit de toutes ces fractions, & choiſiſſez dons les numérateurs chacune des roues à laquelle vous donnerez pour pignon un des dénominateurs.* J'ai donc $\frac{28\times 48\times 60\times 75}{7\times 8\times 6\times 5}$ que je peux diſtribuer ainſi, $\frac{75}{8}$, $\frac{60}{7}$, $\frac{48}{6}$, $\frac{28}{5}$. J'euſſe pu prendre pour mes quatre parts, 2×2×5 ; 2×3 ; 2×3 ; 5 : j'euſſe eu $\frac{20}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{5}{1}$, ce qui m'auroit donné un autre rouage équivalent &c.

296. VI. Delà il eſt aiſé de voir comment on peut calculer le nombre des dents qu'à dû avoir une roue ou un pignon perdu, dans un rouage dont l'effet eſt connu.

Digitized by Google

297. VII. On peut de même trouver le changement qu'il faut faire à une ſimple roue, ou bien à une roue & à ſon pignon, pour changer à volonté le nombre des tours d'un tambour, en conſervant toutes les autres pieces du rouage. Comme ſi on vouloit changer le rouage $\frac{28}{1}$, $\frac{48}{6}$, $\frac{60}{7}$, $\frac{75}{8}$ en un autre qui donnât 4000 tours de tambour, en gardant toutes les pieces, excepté la roue de 48 & le pignon 6. On fera $\frac{28}{1} \times \frac{x}{y} \times \frac{60}{7} \times \frac{75}{8} = 4000$, donc $\frac{x}{y} = \frac{4000}{450} = \frac{80}{9}$, d'où l'on voit qu'il faut ſubſtituer dans le rouage, une roue de 80 dents menant un pignon de 9, à la place de la roue de 48 menant un pignon de 6.

298. THEOREME. *Dans un rouage en équilibre, la puiſſance eſt au poids attiré, en raiſon réciproque des eſpaces qu'ils tendent à parcourir.*

Quoique cette propoſition ſoit une ſuite évidente de l'équilibre (217), voici comme on la peut démontrer. L'eſpace que la puiſſance ou l'extrêmité de la manivelle tendent à parcourir, eſt égal au produit de ſa circonférence C par le nombre de ſes tours N. Or (290) le nombre de ſes tours étant comme $c\kappa$, ſon eſpace ſera $Cc\kappa$: Par la même raiſon l'eſpace parcouru par le poids, eſt comme le produit de la circonférence λ de ſon tambour, par le nombre de ſes révolutions, c'eſt-à-dire, comme $L l\lambda$. Or (Elem. 582) $Cc\kappa : Ll\lambda :: R r\rho : D d\delta$. Et (285) $p : P :: R r\rho : D d\delta$, donc $p : P :: Cc\kappa : Ll\lambda$.

De la Vis & de ſon Ecrou.

299. Tout le monde connoît la vis & ſon écrou : pour en pouvoir calculer l'effet, il faut concevoir tant de triangles égaux qu'on voudra DhH, hIi, iKk, (fig. 35) &c. rectangles en h, i, k, dont les baſes Hh, Ii, Kk ſont égales au contour du cylindre AM. Si on replie ces triangles ſur le cylindre, il eſt clair que les points H, I, K tomberont ſur les points h, i, k, en ſorte que les hypoténuſes formeront autour du cylindre une certaine courbe ſpirale uniforme $Dahbick$, qu'on appelle la vis. Les diſtances

Digitized by Google

égales D*h*, *hi*, *ik* s'appellent *les pas de la vis*. Il eſt clair auſſi qu'il faut que cette courbe ſoit en relief. L'écrou eſt une vis formée de la même maniere dans la concavité d'un cylindre creux, ſa courbe doit être égale à celle de la vis, & ſes pas auſſi égaux, afin qu'elle puiſſe en être l'écrou.

300. Il y a trois manieres de ſe ſervir de la vis & de ſon écrou : la premiere eſt de fixer l'écrou, & de faire tourner la vis dans l'écrou : la ſeconde eſt de fixer la vis, & de faire tourner l'écrou : la troiſieme eſt de fixer la vis, en ſorte cependant qu'elle puiſſe tourner ſur ſon axe, & que l'écrou en approche en gliſſant contre un plan ſans tourner. On fait tourner la vis ou ſon écrou par le moyen d'un tour, qui forme la tête de la vis ou le plan de l'écrou, ou par des leviers qu'on applique à l'un ou à l'autre.

L'uſage de la vis eſt d'attirer un fardeau attaché à la partie mobile, ou de preſſer un corps contre un plan en y appuyant le bout de la vis mobile, ou autrement.

301. Pour concevoir l'action de la vis, il faut conſidérer que ſi on ne lui ſuppoſe aucune peſanteur, & que la vis & ſon écrou ſoient libres, & dans un état parfait, l'écrou doit tourner autour de ſa vis, ou la vis dans ſon écrou, comme un plan gliſſe en montant ſur un plan incliné, avec d'autant plus de facilité, que les pas de la vis ſeront plus ſerrés. Mais ſi l'écrou, par exemple, eſt chargé d'un poids, tous les points de ſa ſpire preſſent tous les points de celle de la vis, de même que tous les points d'un plan chargé preſſent tous ceux du plan incliné ſur leſquels il gliſſe. On peut donc repréſenter l'effort de chaque point de l'écrou ſur le point correſpondant de la vis, par celui d'un poids P (fig. 36), poſé ſur un plan incliné IKL, qui eſt un des triangles dont la vis eſt formée. Cela poſé.....

302. THEOREME. *La puiſſance appliquée au levier qui eſt perpendiculaire à l'axe de la vis ou de ſon écrou, eſt à la force avec laquelle la vis ou ſon écrou font leur effet, comme un pas de la vis, eſt à la circonférence décrite par le bout du levier.*

DEM. Si DR repréſente le levier deſtiné à faire tourner la vis, il eſt clair que l'axe de cette vis reſtant immobile,

Digitized by Google

le point d'appui de ce levier eſt en D, que les bras ſont DN, DR; & que la puiſſance R doit faire équilibre avec une force F capable de ſoutenir l'effort de l'écrou contre la vis, ou de la vis contre l'écrou. On a donc (234) R : F :: DN : DR. Or (Elem. 582) DN eſt à DR, comme LK contour de la vis, eſt à H contour du cercle décrit par l'extrêmité R du levier : Donc R : F :: LK : H. Mais l'effort que fait chacun des points de l'écrou ſur chacun des points correſpondants de la vis, étant repréſenté par celui d'autant de poids P, retenus chacun en équilibre ſur le plan incliné IK, par une force *p* appliquée à chacun dans une direction parallele à LK, on a pour chacun de ces poids (264) *p* : P :: IL : LK. Donc (Elem. 310) la ſomme de toutes les forces *p* néceſſaires pour retenir en équilibre tous les poids P, eſt à la ſomme de tous ces poids : c'eſt-à-dire, la force F capable de ſoutenir tout l'effort E de l'écrou contre la vis, eſt à cet effort E, comme IL à LK; ou F : E :: IL : LK. Donc en compoſant (276) R : E :: LK × IL : H × LK :: IL : H. (Elem. 296). C'eſt-à-dire, la puiſſance appliquée au levier eſt à ſon effet ſur la vis, comme un pas de la vis, eſt à la circonférence du tour, ou du cercle décrit par le bout du levier.

303. COROLL. I. La vîteſſe du poids dont un écrou gliſſant eſt chargé, ou qu'une vis preſſe, eſt exprimée par un pas de la vis; & celle de la puiſſance par la circonférence du levier : *La puiſſance eſt donc au poids, en raiſon réciproque de leurs vîteſſes.*

304. COROLL. II. *Plus les pas de la vis ſeront ſerrés & le levier long, plus la vis aura d'effet.*

De la Vis ſans fin.

305. Quelquefois on applique la vis à une roue pour lui ſervir de pignon, elle s'appelle alors *Vis ſans fin* : & l'on conçoit aiſément qu'elle fait autant de tours que la roue a de dents, parce qu'elle engrenne ſes pas ſucceſſivement dans chaque dent.

306. THEOREME. *Quand une roue* A *tourne par le moyen d'une*

Digitized by Google

d'une vis ſans fin, la puiſſance appliquée au levier, à la manivelle ou à la roue dont cette vis eſt le pignon, eſt à ſon effet; par exemple, au poids qu'attireroit une corde entortillée ſur le tambour de la roue A; *comme le produit d'un pas de la vis par le rayon du tambour, au produit de la circonférence décrite par le levier multipliée par le rayon de la roue* A.

DEM. Cette propoſition eſt évidente par ce qui a été dit ci-deſſus (255 & 302). Car la puiſſance appliquée à la manivelle, eſt à l'effet de la vis ſur la roue A, comme un pas de la vis, à la circonférence décrite par la manivelle : & l'effet de la vis ſur la roue A, eſt au poids attiré par ſon tambour, comme le rayon du tambour, au rayon de la roue A; & par conſéquent en multipliant ces deux proportions, on aura l'analogie propoſée.

307. COROLL. I. Par un même raiſonnement, on verra que ſi on applique une puiſſance *p* à une manivelle M, qui faſſe tourner par le moyen d'une vis ſans fin *m* une roue A, dont le pignon *a* faſſe tourner une autre vis ſans fin O, laquelle vis faſſe en même-temps tourner une roue B, dont le pignon *b* faſſe tourner une autre vis ſans fin Q, laquelle vis faſſe encore tourner une troiſieme roue C, qui porte le tambour ſur lequel s'entortille la corde, qui attire un fardeau P : on verra, dis-je, que *p* eſt à P comme le produit fait d'un pas de la vis *m* multiplié 1°, par le rayon du tambour, 2°, par les rayons des pignons *a*, *b*, 3°, par les rayons des vis ſans fin O, Q, qui agiſſent ſur les roues B & C : au produit fait de la circonférence décrite par la manivelle multipliée, 1°, par les rayons des roues A, B, C, 2°, par les rayons des vis O, Q, qui agiſſent ſur les pignons des roues A & B. Car la propoſition précédente donne déja 1°, l'analogie compoſée... La puiſſance *p* eſt à l'effet du pignon *a*, comme le pas de la vis *m* multiplié par le rayon du pignon *a*, eſt à la circonférence de la manivelle multipliée par le rayon de la roue A. L'effet du pignon *a* eſt de faire tourner la vis O, qui fait tourner elle-même la roue B de même qu'un trueil : il vaut mieux dire de même qu'une manivelle appliquée à une vis, & ainſi regarder

tout comme des vis. Faiſant donc D, d, δ les pas de vis, (255) 2°, l'effet du pignon *a* ſur la vis O, eſt à l'effet de la vis O ſur la roue B, comme le rayon de cette vis à l'endroit où elle eſt engrenée dans la roue B, au rayon de cette même vis à l'endroit où elle eſt engrenée dans le pignon *a*. 3°, L'effort de la vis O ſur la roue B, eſt à celui avec lequel cette roue fait tourner ſon pignon *b*, comme le rayon de ce pignon au rayon de la roue. 4°, L'effet du pignon *b* ſur la vis Q, eſt à l'effet de cette même vis ſur la roue C, comme le rayon de cette vis à l'endroit où elle eſt engrenée dans la roue C, au rayon de la même vis à l'endroit où elle eſt engrenée dans le pignon *b*. 5°. Enfin l'effet de la roue C ſur ſon tambour, eſt à l'effet P de ce tambour; comme ſon rayon, eſt au rayon de la roue C. Donc par une analogie compoſée, on aura le rapport de la puiſſance *p* au poids P tel qu'on vient de le donner.

308. COROLL. II. Il ſuit de-là que la vîteſſe de la derniere roue C doit être très-petite, puiſque chaque roue ne fait qu'un tour, tandis que la vis qui la fait tourner en fait autant que la roue a de dents.

309. EXEMPLE DU CALCUL DE CETTE MACHINE. Soit le rayon de la manivelle de 168 lignes, ſa circonférence ſera (Elem. 616) de 1056 lignes. Soit le rayon de la roue A de 96, de la roue B de 90, de la roue C de 85. Celui du pignon *a* de 20, du pignon *b* de 18, du tambour de 16 lignes. Soit la moitié de l'épaiſſeur de la vis O ou ſon rayon à l'endroit où elle touche le pignon *a*, de 14 lignes: à l'endroit où elle touche la roue B de 9 lignes: le rayon de la vis Q à l'endroit où elle touche le pignon *b* de 8 lignes, & à l'endroit où elle touche la roue C de 6 lignes; ſoit enfin le pas de la vis *m* de 1 ligne; par l'analogie on aura $p : P :: 1 \times 20 \times 9 \times 18 \times 6 \times 16 : 1056 \times 14 \times 90 \times 8 \times 85$, ou $p : P :: 311040 : 868589568000$: donc ſi *p* eſt 1 livre, P ſera de $279253\frac{1}{3}$ livres, c'eſt-à-dire, une livre en ſoutiendra plus de 279253 en équilibre.

Digitized by Google

Des Mouffles.

310. Les mouffles ſont des aſſemblages de pluſieurs poulies dans deux chapes. Ce n'eſt qu'une répétition de poulies qui agiſſent enſemble, & non les unes ſur les autres, en quoi cette machine differe des autres machines compoſées que nous expliquons ici. Elles tournent quelquefois toutes ſur un même axe ou *goujon* dans chaque chape, quelquefois elles ſont placées les unes au-deſſous des autres avec un goujon pour chacune : on fixe une des chapes (qu'on appelle alors *Mouffle fixe*) à un point immobile, & l'autre (appellée *Mouffle mobile*) au fardeau P qu'on veut attirer vers la mouffle fixe. On attache pour cet effet le bout d'une corde, ou à la chape de la mouffle mobile, ou à celle de la mouffle fixe, ou à quelque autre point immobile : & l'ayant fait paſſer ſucceſſivement ſur chaque poulie de chaque mouffle, on applique une puiſſance *p* à l'autre bout de la corde pour la tirer.

311. THEOREME. *Le fardeau* P *étant en équilibre avec la puiſſance* p, *la corde eſt par-tout également tendue.*

DEM. La partie *p*H (fig. 38) de la corde où eſt appliquée la puiſſance *p*, a une tenſion égale à celle de la partie K*a* (246); par la même raiſon la tenſion de la partie K*a* eſt égale à celle de *ah*, &c.

312. COROLL. *Il ſuit de-là que la tenſion de chaque partie de la corde eſt égale à la puiſſance* p, *ou que chaque partie de la corde fait ſur chaque poulie un effort égal à* p.

313. THEOREME. *En ſuppoſant que les deux cordons qui embraſſent chacune des poulies de la mouffle mobile ſont des angles égaux de part & d'autre avec la droite que le centre de la poulie décrit dans le mouvement de la mouffle.* 1°. *Si le bout* R (fig. 39) *du cordon eſt attaché à la poulie fixe, ou à tel point fixe qu'on voudra, la puiſſance* p *eſt au poids* P, *comme* 1 *à la ſomme des quotients de chaque ſoutendante de l'arc embraſſé par la corde dans la mouffle mobile, diviſée par ſon rayon.*

DEM. Le poids P eſt égal à la ſomme des charges que

Digitized by Google

portent chaque poulie mobile : car celles qui ſont fixes ne ſervent qu'à changer la direction de la corde, pour la faire paſſer par-deſſous pluſieurs poulies mobiles (249) : or le bout de la corde R étant attaché à un point fixe, la charge de la premiere poulie kh ſe connoît (250) par cette proportion $kd : kh :: p : \frac{p \times kh}{kd}$. Celle de la ſeconde KH par celle-ci, $KD : KH :: p : \frac{KH \times p}{KD}$, & par conſéquent $P = \frac{p \times kh}{kd} + \frac{p \times KH}{KD}$. En réduiſant cette équation en proportion, $p : P :: 1 : \frac{kh}{kd} + \frac{KH}{KD}$.

314. COROLL. *Si les cordes étoient paralleles entr'elles, la puiſſance ſeroit au poids, comme* 1 *au double du nombre des poulies mobiles.* Car alors les cordes embraſſeroient la moitié de chaque poulie, & on auroit $kh = 2kd$, & $KH = 2KD$, donc $\frac{P}{p} = \frac{2kd}{kd} + \frac{2KD}{KD}$, ou $\frac{P}{p} = 4$, & en proportion $p : P :: 1 : 4$.

315. II°. *Mais ſi le bout de la corde* R (fig. 38) *eſt attaché à la chape mobile, la puiſſance eſt au poids, comme* 1 *à la ſomme du quotient de la moitié de la ſoutendante de la derniere poulie fixe, diviſée par ſon rayon, & des quotients de chaque ſoutendante entiere des poulies mobiles, diviſée par ſon rayon.*

DEM. Si la corde eſt attachée en R, le bout bR contribue à ſoutenir le poids P comme ſi une puiſſance p tiroit le cordon ck de c vers k, auquel cas cette puiſſance p ſoutiendroit en équilibre la moitié de la charge de la poulie fixe B. Or cette charge ſe trouve en faiſant $Bb : bc :: p : \frac{bc \times p}{Bb}$; Donc l'effort que le bout de la corde bR ſoutient eſt $= \frac{p \times \frac{1}{2} bc}{Bb} = \frac{p \times bf}{Bb}$; & les poulies mobiles d, D ſoutenant les mêmes efforts que dans le Théorême précédent, on aura $P = \frac{p \times bf}{Bb} + \frac{p \times kh}{kd} + \frac{p \times KH}{KD}$, d'où on tirera l'analogie $p : P :: 1 : \frac{bf}{Bb} + \frac{kh}{kd} + \frac{KH}{KD}$.

Digitized by Google

316. COROLL. *Quand les cordes ſont paralleles entr'elles, la puiſſance eſt au poids, comme l'unité eſt à 1 plus le double du nombre des poulies mobiles:* car alors $\frac{bf}{Bb} = 1$, $\frac{kh}{kd} = 2$, & $\frac{KH}{KD} = 2$; donc $p : P :: 1 : 1+2+2 :: 1 : 5$.

317. SCHOLIE. Si les deux cordons de quelque poulie de la mouſle mobile ne font pas des angles égaux de part & d'autre avec la droite que le centre de la poulie décrit dans ſon mouvement, alors il faudra ſubſtituer aux Analogies précédentes, celle qui ſuit : La puiſſance appliquée à l'extrémité du cordon, eſt au poids entraîné par la mouſle mobile, comme le rayon ou ſinus total, eſt à la ſomme des coſinus de l'obliquité de chacun des cordons qui embraſſent les poulies mobiles, à l'égard de la droite ſelon laquelle la mouſle mobile produit ſon effet, ou ce qui eſt le même à l'égard de la droite que le centre de chaque poulie mobile décrit dans ſon mouvement.

Des principales Cauſes qui font obſtacle à l'effet des Machines, & de la maniere d'y avoir égard dans le calcul.

318. IL s'en faut de beaucoup que la pratique & la conſtruction des machines répondent à la théorie. Nous avons ſuppoſé dans les calculs précédents que tout étoit dans un état de perfection : on va voir combien il en faut rabattre. Si l'état des choſes pouvoit être conforme aux ſuppoſitions géométriques, une Fourmi pourroit conduire dans un terrein uni & de niveau une charrette chargée de plus de 5000 livres, que cinq chevaux ont bien de la peine de tirer ſur un chemin pavé ; car ſuivant la conſtruction géométrique, les roues ſont des cercles parfaits, parfaitement mobiles & en équilibre ſur leur axe ou eſſieu ; elles ne touchent la terre qu'en un point, & la ſurface de la terre eſt parfaitement polie, parfaitement dure : d'où on conclud fort bien que la moindre force finie ſuffit pour

Digitized by Google

faire aller ſans ceſſe la charrette dans une direction parallele au plan des roues, quelle que ſoit ſa charge, pourvu que la direction de ſon centre de gravité concoure avec celle de l'eſſieu : mais cette concluſion eſt bien éloignée de la vérité.

C'eſt à ces obſtacles qu'il faut faire grande attention avant que de prononcer ſur l'utilité ou ſur la poſſibilité de l'exécution d'une machine ; car c'eſt ce qui les fait ordinairement ſi mal réuſſir. Nous ne pouvons nous étendre beaucoup là-deſſus ; c'eſt une matiere qui demanderoit un Traité entier, d'autant plus qu'elle n'a pas encore été aſſez approfondie *. Nous nous contenterons d'indiquer les principaux inconvénients qu'on rencontre dans la conſtruction actuelle des machines ſimples.

319. DANS LE LEVIER. Comme il n'y a pas de corps parfaitement dur, la flexibilité du levier lui donne une courbure vers ſon point d'appui lorſqu'on s'en ſert, cette courbure fait que les vrais bras de levier ne ſont pas les vraies parties du levier depuis le point d'appui juſqu'à ceux où ſont appliquées les puiſſances : le défaut de dureté fait auſſi que le point d'appui ne peut être un vrai point Phyſique, ni un point inflexible ; d'ailleurs l'expérience a appris que les flexibilités de deux leviers ſemblables ne ſont pas proportionnelles à leurs dimenſions:

320. II°. Le poids du levier eſt encore cauſe que les bras que nous lui avons aſſignés ne ſont pas ſes véritables bras. Soit le levier AB (fig. 27) d'une matiere homogene, & d'une figure uniforme, long de 24 pouces, peſant 15 onces. Soit la puiſſance P de 10 livres ou de 160 onces, en équilibre avec la puiſſance p de 20 livres ou de 320 onces. Puiſqu'en ſuppoſant le levier ſans peſanteur $BD = \frac{P \times AB}{P+p} = 8$ pouces (240) : AD ſera donc de 16 pouces : mais parce que le levier peſe 15 onces, AD peſera 10 onces & BD 5 onces. Par conſéquent la charge que AD

* M. Belidor, dans l'introduction à ſon Architecture hydraulique, a donné des regles & des principes ſur cette matiere, qui peuvent ſuffire dans la pratique, en attendant que cette partie de la Méchanique ait été perfectionnée.

Digitized by Google

ſera porter à l'appui ſera de 160 + 10 onces, & celle de BD ſera de 320 + 5 onces, ou P = 160 + 10, & p = 320 + 5. Or cela poſé les bras ne ſont plus réciproquement comme ces nombres ; donc le vrai point d'appui du levier peſant n'eſt pas en D.

Pour le trouver, il faut regarder la peſanteur du levier comme un poids F ſuſpendu au milieu du levier ; & chercher par la méthode qu'on donnera dans la ſuite (349) le point de ſuſpenſion commun aux poids P, p, F : on trouvera dans cet exemple AD de 15 pouces $\frac{20}{33}$, & BD de 8 pouces $\frac{4}{33}$.

321. III°. L'épaiſſeur du levier fait qu'on ne peut appliquer les puiſſances à leurs vrais points, qui ſont dans l'axe qui paſſe au milieu de cette épaiſſeur.

322. DANS LA POULIE. Il y a trois inconvénients conſidérables, ſavoir le poids des cordes, leur roideur, & le frottement des parois du trou ſur ſon goujon, & des faces de la poulie ſur la chape.

La roideur des cordes eſt d'autant plus nuiſible, 1°, qu'elles ſont plus groſſes : 2°, qu'elles ſont plus neuves : 3°, qu'elles portent un plus grand poids, parce qu'elles ont d'autant plus de peine à ſe plier : 4°, que la machine va plus vîte, parce qu'il faut qu'elles ſe plient plus vîte : 5°, que les poulies ſont plus petites, parce qu'alors il faut que les cordes ſe plient davantage ; d'où il ſuit que dans la pratique il faut préférer les vieilles cordes aux neuves, & les grandes poulies aux petites, toutes choſes d'ailleurs égales.

323. DANS LE TOUR. La roideur & le poids de la corde cauſent tous les mêmes inconvénients dans le tour que dans la poulie, mais ſon épaiſſeur en cauſe d'ailleurs un autre très-conſidérable : car la corde entortillée ſur le tambour en augmente le rayon de la moitié de ſon épaiſſeur, parce que l'action de la corde ſe fait ſuivant ſon axe, de ſorte que ce ſeul inconvénient exige qu'on change l'analogie du tour en celle-ci. *La puiſſance eſt au poids, comme le rayon du tambour plus la moitié de l'épaiſſeur de la corde*, ou ſi la corde s'entortille deſſus pluſieurs fois, *comme la dif-*

tance de l'axe du tambour à l'axe de la corde extérieure, eſt au rayon de la roue. Il y a encore un frottement conſidérable des pivots ſur leurs crapaudines.

324. DANS LE PLAN INCLINÉ, la plus grande difficulté conſiſte dans le frottement des ſurfaces.

325. A L'ÉGARD DES FROTTEMENTS, il n'y a pas de machines où il ne s'en trouve : c'eſt le plus grand obſtacle à leur mouvement ; la connoiſſance que nous en avons n'eſt guere fondée que ſur l'expérience; elle n'eſt pas encore ſuffiſamment éclaircie.

Il n'y a pas de ſurface ſi polie qui ne ſoit toute hériſſée de petites pointes, dont les intervalles ſont des petites cavités : on les voit facilement au Microſcope, Quand une ſurface gliſſe ſur une autre, ſes petites pointes entrent dans les cavités de l'autre & réciproquement : elles ne peuvent donc ſe mouvoir que les petites pointes ne ſortent de leurs petites cavités pour retomber dans d'autres, & ainſi de ſuite.

326. I°. On a trouvé par expérience que *la quantité du frottement de deux plans l'un ſur l'autre ne dépend pas tant de la grandeur des ſurfaces qui ſe touchent, que de la peſanteur du plan gliſſant.* Car ſi on conçoit la preſſion de la ſurface gliſſante cauſée par ſon poids, comme diſtribuée également dans toutes ſes parties : ſoient deux plans A & B peſant chacun 144 livres, & dont l'un A ait ſa ſurface de 12 pieds quarrés, & l'autre B de 3 pieds quarrés : que tous deux gliſſent ſéparément ſur la ſurface C : donc la preſſion de A ſur C ſera de 12 livres par pied quarré, & la preſſion de B ſera de 48 livres par pied : or il faut une force égale pour élever à une certaine hauteur en un temps donné un poids de trois fois 48 livres, que pour y élever un poids de 12 fois 12 livres. Donc il faut une égale force pour vaincre le frottement de la ſurface B, que pour vaincre celui de la ſurface A. Donc la quantité de frottement eſt en raiſon du poids, & non pas de l'étendue des ſurfaces.

327. REM. Cette propoſition n'eſt pas abſolument vraie dans tous les cas, mais ſeulement dans ceux qui ſont les plus ordinaires.

Digitized by Google

328. II°. On a trouvé par expérience, que *lorſque les ſurfaces ne ſont pas fort dures, ni ſuſceptibles d'un grand poli, comme ſont les bois & les pierres ordinaires, la quantité du frottement eſt ordinairement le tiers de la preſſion.* Voici comme l'expérience ſe peut faire. On poſe un corps peſant dont la ſurface eſt plane & polie autant que ſa nature le permet, ſur un plan de niveau poli de même ; & l'on incline inſenſiblement ce plan, juſqu'à ce que le corps commence à gliſſer. Dans les matériaux ordinaires, qui ne ſont pas fort durs, ni capables d'un grand poli, le corps ne commence à gliſſer que quand le plan eſt incliné de 18 à 19 degrés : (auquel cas la hauteur du plan n'eſt que le tiers de ſa longueur.) Or quand le corps eſt ſur le point de gliſſer, ſon frottement qui l'a retenu juſques alors ſur le plan, eſt ſur le point d'être ſurpaſſé par la partie de la peſanteur qui oblige le corps de gliſſer. On peut donc repréſenter ce frottement par une puiſſance CH ou KD (fig. 32) qui retient le corps en équilibre ſur le plan, tandis que le poids CD de ce corps le contraint de gliſſer. Mais (263) CH : CD :: FB : AB. Donc *la quantité du frottement eſt à celle de la preſſion, comme la hauteur du plan incliné eſt à ſa longueur.*

329. REM. Comme les différents corps ſont plus ou moins durs, & capables de recevoir un poli plus ou moins parfait, pour avoir égard aux frottements que doit vaincre une machine qu'on ſe propoſe de conſtruire, il faut déterminer, par des expériences ſemblables à celle qu'on vient d'indiquer, le rapport des frottements aux preſſions, ſelon la nature des différents matériaux qu'on doit employer, & ſelon le degré de poli qu'on doit leur donner.

330. III°. On a trouvé par expérience que *les ſurfaces des corps hétérogenes, ſont, toutes choſes d'ailleurs égales, ſujettes à un moindre frottement réciproque, que celles des corps homogenes.* Ainſi le cuivre & l'acier s'uſent moins par le frottement que le cuivre qui gliſſe ſur le cuivre, ou l'acier ſur l'acier : le chêne s'uſe moins ſur l'orme, que le chêne ſur le chêne, l'orme ſur l'orme.

Digitized by Google

331. Les frottements ſont d'une très-grande utilité dans la plupart des parties des machines ; ils apportent de très-grands inconvénients dans d'autres parties. Pluſieurs pieces ne ſe ſoutiennent, n'agiſſent ſur les autres que par le frottement, tandis qu'un frottement nuit au jeu des autres pieces.

332. On augmente le frottement en augmentant l'étendue, & les aſpérités des ſurfaces frottantes. On diminue le frottement en durciſſant les ſurfaces, en les poliſſant, en les enduiſant d'une matiere onctueuſe, en les diminuant d'étendue, ce qu'on exécute dans les pieces qui doivent tourner ſur un axe, à l'aide des pivots ou tourillons les plus petits & les plus exactement tournés qu'il eſt poſſible, & en ſubſtituant des plans inclinés polis & durcis aux trous dans leſquels ces pivots devoient tourner. On met entre les ſurfaces qui doivent couler ou gliſſer l'une ſur l'autre, des rouleaux ou cylindres polis. Enfin on diminue le frottement par d'autres moyens que les circonſtances ſuggerent à ceux qui ont de l'expérience dans l'exécution des machines. Mais on ne peut faire un calcul exact de la quantité dont le frottement augmente ou diminue l'effet des machines, tant à cauſe de la nature des matériaux qu'on eſt obligé d'y employer, dont la plupart des qualités & propriétés ſont variables & même inconnues, qu'à cauſe du grand nombre de circonſtances Phyſiques qui ſe rencontrent dans l'exécution & le jeu d'une machine, & deſquelles on ne peut guere faire qu'une eſtimation vague, fondée ſur des expériences qui ne ſont pas ſuſceptibles de juſteſſe, ſi ce n'eſt dans quelques cas fort rares.

Des moments & des centres de gravité, & de la maniere de les déterminer.

333. NOus avons ſuppoſé juſqu'ici que les puiſſances, les poids, & les corps mêmes pouvoient s'appliquer aux machines comme de ſimples points peſants, en réduiſant ces corps à leur centre de gravité : il faut mainte-

Digitized by Google

nant montrer comment on peut trouver ce point dans chaque corps, & quelles ſont ſes principales propriétés.

334. Il eſt évident par ce que nous avons dit du levier, que la puiſſance p (fig. 23, 24, 25) agit d'autant plus efficacement ſur l'appui D, que la droite DG menée de ce point D perpendiculairement à la direction pC de la puiſſance p, eſt une ligne plus longue. D'où il ſuit (16) que l'effort réel de cette puiſſance p ſur l'appui D, étant auſſi d'autant plus grand, que la quantité abſolue de cette puiſſance p eſt plus grande, l'expreſſion de l'effort réel de la puiſſance p ſur le point d'appui D, doit être exprimé par $p \times DG$. Or nous avons ſuppoſé (204) qu'une puiſſance quelconque agiſſoit également dans tous les points de ſa direction : on peut donc dire que la puiſſance p eſt appliquée en G; & parce que (Elem. 438) la perpendiculaire DG meſure la vraie diſtance du point d'appui D à la direction pC, il ſuit enfin que l'*expreſſion de l'effort réel ou de la force relative d'une puiſſance quelconque ſur un point d'appui, eſt le produit de la quantité abſolue de cette puiſſance par ſa diſtance au point d'appui.* Cette expreſſion s'appelle le moment de la puiſſance. En général *le produit de la quantité abſolue d'une puiſſance par ſa diſtance à un point quelconque, à une droite, à un plan, s'appelle le moment de cette puiſſance, par rapport à ce point, à cette droite, à ce plan.*

335. Il ſuit de-là que l'*équilibre ſubſiſte dans les leviers par l'égalité des moments autour du point d'appui;* puiſque il ſuppoſe toujours $p : P :: DS : DG$, & par conſéquent $p \times DG = P \times DS$.

336. On conſidere les moments dans la méchanique, principalement lorſqu'une puiſſance agiſſante eſt appliquée à quelque point d'un corps, dont un autre point eſt fixe, ou cenſé fixe, de ſorte que cette puiſſance agiſſante tende à faire tourner ce corps ſur ce point fixe.

337. Par le mot de *Corps* nous entendrons non-ſeulement une maſſe renfermée dans un certain volume, mais encore un compoſé d'une maſſe & de lignes droites ſans peſanteur, inflexibles, appliquées à cette maſſe pour la faire mouvoir.

Digitized by Google

338. On appelle auſſi *Syſtême de Corps*, l'aſſemblage de pluſieurs corps qu'on conſidere à la fois, ſoit qu'on les imagine abſolument ſéparés les uns des autres, ſoit qu'on les ſuppoſe attachés enſemble par des droites inflexibles, & ſans peſanteur, ce qui eſt le cas le plus ordinaire.

339. Le centre de gravité ou de peſanteur, eſt un point pris en dedans ou en dehors d'un corps, ou d'un ſyſtême de corps, par lequel ce corps ou ce ſyſtême de corps attachés, étant ſuſpendu librement, ou ſoutenu ſur un point fixe, le corps ou le ſyſtême de corps reſte immobile & en équilibre, comme ſi toute la peſanteur de ce corps ou de ce ſyſtême de corps, étoit réunie en ce point.

340. On appelle *Ligne de direction d'un Corps*, toute droite tirée du centre de gravité de ce corps perpendiculairement à l'horizon ou au niveau, parce que tout l'effort de la peſanteur qui ſe trouve réuni au centre de gravité, tend à porter le corps directement au centre de la terre, & par conſéquent perpendiculairement à la ſurface de la terre.

341. D'où il eſt aiſé de concevoir, que *ſi on ſuſpend librement un corps en l'air par un de ſes points, le corps doit ſe mettre en mouvement autour de ce point, pour ſe placer de ſorte que le point de ſuſpenſion ſe trouve dans la ligne de direction.* Car ce qui retient le corps ſuſpendu eſt une puiſſance appliquée au point de ſuſpenſion, & qui détruit l'effet de la peſanteur. La direction dans laquelle cette puiſſance agit doit donc être directement oppoſée à celle de la peſanteur, & par conſéquent dans une droite tirée du centre de la terre au point de ſuſpenſion.

342. De-là on tire une méthode pour trouver par expérience le centre de gravité d'une maſſe quelconque. On la ſuſpend par un point, & l'on marque la droite verticale ou d'à-plomb qui paſſe par ce point. On la ſuſpend enſuite par un autre point, & l'on marque de même la ligne d'à-plomb de ce point : l'interſection de ces deux lignes d'à-plomb, eſt le centre de gravité de la maſſe.

343. Il eſt clair encore que ſi un corps ou un ſyſtême de corps, eſt ſuſpendu à un fil attaché à quelque crochet ;

Digitized by Google

le crochet, le point du corps par lequel il eſt ſuſpendu, & ſon centre de gravité, ſont dans une même ligne droite tendante au centre de la terre, ou verticale. Et c'eſt de-là qu'eſt venu l'uſage des poids ou plombs ſuſpendus à des fils, pour trouver les niveaux & les à-plomb.

344. Quoique les lignes & les ſurfaces ne peſent pas, on ne laiſſe pas de ſe ſervir dans les calculs de la méchanique de leurs centres de gravité, en conſidérant ces lignes comme des ſolides, dont deux dimenſions ſont infiniment petites & égales, & ces ſurfaces comme des ſolides, dont une des dimenſions eſt infiniment petite. Nous allons montrer comment on trouve les centres de gravité des lignes, des contours, des ſurfaces & des ſolides, dont on a donné les propriétés dans les Eléments de Mathématiques.

345. THEOREME I. *Si un ſolide eſt compoſé d'une matiere homogene, par-tout également denſe, & ſi ſa figure eſt parfaitement ſymmétrique en tout ſens, ſon centre de figure eſt en même temps ſon centre de gravité.*

DEM. Si de tous les points qui ſont d'un côté de la ſurface de ce ſolide, on fait paſſer des droites par le centre, juſques aux points oppoſés de l'autre côté, ces droites ſont diviſées en deux également par le centre (Elem. 527) les deux parties de chaque droite ſont donc comme deux bras de levier égaux & également chargés, dont par conſéquent les moments ſont égaux à l'égard du centre qui eſt le point d'appui. Donc toutes ces droites, & par conſéquent tout le ſolide peut reſter en équilibre ſur ſon centre de figure.

346. COROLL. I. *Le centre de gravité d'une droite eſt à ſon point de milieu.*

347. COROLL. II. *Le centre de gravité du contour & de la ſurface d'un Cercle, d'une Ellipſe, d'un Polygone régulier, &c. eſt au centre de figure.*

348. COROLL. III. Le centre de gravité de la ſurface d'une Sphere, d'un Polyhedre régulier, eſt à ſon centre de figure : celui d'un Priſme, d'un Cylindre, eſt au milieu de l'axe qui paſſe par le centre de gravité des deux baſes oppoſées.

Digitized by Google

349. PROBLEME I. *Etant donnés pluſieurs poids* M, m, μ (fig. 40) *ſuſpendus à un levier quelconque aux points* P, p, π *trouver le point de ſuſpenſion* Q *de ce levier, de ſorte que tous ces poids reſtent en équilibre, & le levier de niveau.*

SOLUT. Il faut chercher (240) le point d'appui A de deux de ces poids à volonté, comme de M & de m; ſuppoſant enſuite en A un poids égal à la ſomme $M+m$ des deux qu'on a pris d'abord, il faut chercher de même le point d'appui qui convient au poids A & au poids μ, & ainſi ſucceſſivement des autres poids tant qu'il y en aura.

350. PROBLEME II. *Trouver le centre de gravité* G *d'un ſyſtême de lignes droites*, A, B, C, D. (fig. 41).

SOLUT. Joignez les points de milieu de deux de ces droites à volonté par une droite AB, que vous regarderez comme un levier chargé à ſes extrémités de deux poids, exprimés par les longueurs de ces deux droites, cherchez-en le point d'équilibre E, en faiſant (240) comme la ſomme de ces deux droites, eſt à la longueur du levier AB, ainſi une de ces droites comme B, eſt à la diſtance AE, du milieu de l'autre droite A au point d'équilibre E. De ce point E menez au milieu d'une autre des droites données une droite EC que vous regarderez comme un levier chargé au bout E d'un poids égal à la ſomme des lignes A & B, & au bout C d'un poids repréſenté par la longueur de la ligne C : cherchez-en de même le point d'équilibre F. De ce point F menez au milieu d'une autre des droites données une droite ou levier FD, dont vous chercherez de même le point d'équilibre G, & ainſi de ſuite.

351. COROLL. I. La ſolution de ces deux problêmes étant la même, on peut l'appliquer à d'autres problêmes ſemblables, comme de trouver le centre de gravité d'un ſyſtême quelconque de corps à volonté, dont les centres de gravité particuliers ſont donnés de poſition, & dont les rapports des poids des corps ſont auſſi donnés.

352. COROLL. II. Par la ſolution de ce problême, il eſt aiſé de trouver le centre de gravité du contour d'une figure rectiligne quelconque.

Digitized by Google

353. PROBLEME III. *Trouver le centre de gravité de la ſurface d'un Triangle* ABC (fig. 42).

SOLUTION. Diviſez deux de ſes côtés à volonté en deux également comme en D & en E, & le centre de gravité ſe trouvera à l'interſection F des droites DC, EA, menées de ces points aux angles oppoſés C, A. Car EA diviſe en deux également toutes les droites paralleles à BC qui rempliroient la ſurface du triangle; donc elle paſſe par tous leurs centres de gravité, & par conſéquent par celui du Triangle : Par la même raiſon DC y paſſe auſſi.

354. SCHOLIE. C'eſt par un ſemblable raiſonnement qu'on démontre que *le centre de gravité d'un polygone régulier, dont le nombre des côtés eſt impair, eſt le même que le centre de figure.*

355. COROLL. Si on mene EG parallele à AB, les triangles ſemblables CEG, CBD font voir que $EG = \frac{1}{2} BD = \frac{1}{2} AD$. A cauſe des triangles ſemblables DAF, EGF, on a AD : GE :: AF : FE. Or $AD = 2GE$, donc $AF = 2EF$. Donc le centre de gravité F eſt aux $\frac{2}{3}$ de AE, en comptant du ſommet A : on démontre de même que $CF = \frac{2}{3} CD$. Donc *on trouve le centre de gravité d'un triangle, en prenant les deux tiers d'une droite, qui va d'un angle quelconque, au milieu du côté oppoſé.*

356. PROBLEME IV. *Trouver le centre de gravité d'un Trapeze.*

SOLUTION. Diviſez le Trapeze en deux triangles par une diagonale, cherchez le centre de gravité de chacun de ces deux triangles : joignez ces centres par une droite, & regardez-la comme un levier chargé à ſes extrémités de deux poids exprimés par les ſurfaces des deux Triangles, cherchez-en le point d'appui, ce ſera le centre de gravité du Trapeze.

357. AUTRE SOLUTION. Ayant trouvé les centres de gravité de deux Triangles formés par une Diagonale, & les ayant joints par une droite, cherchez & joignez de même les centres de gravité de deux autres Triangles formés par une autre diagonale. L'interſection de ces deux droites ſe fera au centre de gravité du Trapeze.

Digitized by Google

358. PROBLEME V. *Trouver le centre de gravité d'un Polygone irrégulier.*

SOLUTION GENERALE. Diviſez-le en autant de Triangles qu'il a de côtés moins deux (Elem. 521); cherchez les centres de gravité, & les ſurfaces de tous ces Triangles; regardez tous ces centres de gravité comme autant de lieux d'autant de corps, dont le poids eſt repréſenté par la ſurface du triangle, & le centre de gravité du Polygone ſera celui du ſyſtême de ces corps ou triangles.

359. SOLUTION *pour le Pentagone.* Diviſez le Pentagone par une diagonale en un Trapeze & en un Triangle; joignez les centres de gravité de ces deux parties par une droite. Diviſez le même Pentagone par une autre diagonale en un trapeze & en un triangle; joignez de même leurs centres de gravité par une droite, qui ira couper la droite précédente au centre de gravité du Pentagone.

360. *Pour les autres Polygones.* On trouve le centre de gravité d'un Hexagone en le diviſant à deux fois en deux Trapezes, dont on joint les centres de gravité par deux droites qui ſe coupent au centre de gravité de l'Hexagone. On trouve de même celui de l'Eptagone à l'aide d'un Trapeze & d'un Pentagone, puis d'un autre Trapeze & d'un autre Pentagone. Celui d'un Octogone, en le partageant à deux fois en deux Pentagones, &c.

361. THEOREME II. *La longueur d'un arc eſt à celle de ſa corde, comme le rayon du cercle eſt à la diſtance du centre de gravité de l'arc à ſon centre de figure.*

DEM. Soit d'abord un arc BAD (fig. 43) diviſé en deux également au point A, ſon centre C, ſa corde BD. Les cordes égales AB, AD étant diviſées en deux également aux points I, K, le point O milieu de IK eſt le centre de gravité du ſyſtême de ces deux cordes: joignez CK, & les triangles rectangles ACK, OCK, ADG ſont ſemblables, donc AD : DG :: CK : CO :: 2AD : 2DG :: AB + AD : BD. C'eſt-à-dire, *la ſomme des deux cordes égales* AB, AD *eſt à la corde totale* BD, *comme* CK *coſinus de la moitié d'un des arcs, eſt à* CO *diſtance du centre de gravité*

vité du ſyſtême de ces deux cordes au centre de l'arc.

362. Soit maintenant un arc BAD (fig. 44) diviſé en quatre arcs égaux aux points E, A, F : par le milieu de leurs cordes, tirez les droites IH, LK, leſquelles étant paralleles aux cordes AB, AD (à cauſe des Triangles EAB, EIH qui ſont ſemblables (Elem. 559) auſſi-bien que les triangles FAD, FLK) ſeront coupées en deux également aux points M, N, par les rayons CE, CF. Tirez MN qui ſera perpendiculaire au rayon AC, (& par conſéquent parallele à la corde BD,) à cauſe des droites égales CM, CN qui forment un Triangle iſoſcele MCN, dont l'angle C eſt coupé en deux également par le rayon AC. Cela poſé, le centre de gravité du ſyſtême des quatre cordes BE, EA, AF, FD eſt en G (350) : ayant donc tiré CK, les Triangles rectangles CNK, FDO ſont ſemblables, parce que leur plus petit angle a pour meſure la moitié d'un des quatre arcs égaux ; donc CK : CN :: DF : DO :: 2DF : 2DO :: DF + FA : DA. Donc CK : DF + AF :: CN : DA. De même les triangles rectangles GCN, ADP ſont ſemblables, parce qu'ils ont un angle meſuré par la moitié d'un des deux arcs égaux AB, AD : donc CN : DA :: CG : DP : & par conſéquent CK : DF + AF :: CG : DP : ou bien DF + AF : DP :: CK : CG :: 2DF + 2AF : 2DP :: BE + EA + AF + FD : BD. Donc la ſomme des quatre arcs égaux, eſt à la corde totale, comme CK coſinus de la moitié d'un de ces arcs, eſt à CG diſtance des centres de gravité & de figure.

La même choſe ſe démontre de la même maniere pour un arc diviſé en 8, 16, 32, &c. parties égales en progreſſion géométrique double, d'où il ſuit que ſi ce nombre eſt infini, la ſomme des cordes deviendra l'arc lui-même, le coſinus d'un demi-arc deviendra le rayon, & la proportion précédente ſe changera en celle qui fait le Théorême.

363. COROLL. I. *Pour trouver le centre de gravité d'un arc de cercle donné*, comme de 55°, il faut réduire cet arc en parties égales, telles que ſont celles du rayon des ta-

bles de sinus, par cette analogie, 180° sont à 55°, comme 3,14159 sont à 0,95991. Il faut ensuite prendre la corde de 55°, c'est 0,92350, (double du sinus de 27° $\frac{1}{2}$), & faire comme 0,95991 sont à 0,92350, ainsi 1 est à 0,96207 distance du centre de l'arc à son centre de gravité, qui doit être marqué sur le rayon qui passe au milieu de l'arc.

364. COROLL. II. *Pour trouver le centre de gravité d'un secteur de cercle, il faut trouver le centre de gravité d'un arc de même nombre de degrés, mais dont le rayon ne soit que les* $\frac{2}{3}$ *de celui qui ferme le secteur.* Ou ce qui revient au même, il faut prendre sur le rayon qui divise le secteur en deux également, un point qui soit éloigné du centre de l'arc des $\frac{2}{3}$ de la distance du même centre au centre de gravité de l'arc. Par exemple, pour un secteur de 55° on trouvera 0,64138, (= $\frac{2}{3}$ de 0,96207 trouvés plus haut). Car si on imagine que ce secteur soit divisé en tant de petits secteurs égaux, que chacun puisse passer pour un triangle infiniment étroit, le centre de gravité de chacun de ces triangles se trouvera aux $\frac{2}{3}$ du rayon (355), & par conséquent tous ces centres de gravités formeront un arc concentrique, dont le rayon ne sera que les $\frac{2}{3}$ de celui du secteur; le centre de gravité de cet arc sera donc celui du secteur entier.

365. COROLL. III. *Pour trouver le centre de gravité d'un segment de cercle* ABDA (fig. 45). Il faut regarder ce segment comme faisant partie d'un secteur ACBDA, dont on a retranché le triangle ABC. Or ayant trouvé en P le centre de gravité de ce triangle, en R celui du secteur, & supposé en p celui du segment, on regardera la droite Pp, comme un levier dont le point d'appui est en R, qui porte à son bout P un poids représenté par la surface du triangle ABC, & au bout p un poids représenté par celle du segment, on trouvera donc (241) $Rp = \frac{surf.\ triang.\ ABC \times PR}{surf.\ secteur - surf.\ triang.} = \frac{surf.\ tr. \times PR}{surf.\ segment.}$. Ainsi pour un arc de 55°, on trouve CP = 0,59134, la surface du triangle ABC = 0,40957, celle du segment = 0,7039, PR = 0,05004, & par

conſéquent $Rp = 0{,}29117$. Donc $Cp = 0{,}93255$, ou $Dp = 0{,}06745$.

366. PROBLEME VI. *Trouver le centre de gravité d'une Pyramide.*

SOLUTION. Il eſt évident 1°, que les Eléments d'une pyramide étant des polygones ſemblables à la baſe & ſemblablement placés, dont les dimenſions décroiſſent en progreſſion arithmétique depuis la baſe juſqu'au ſommet, la droite qui va du centre de gravité de la baſe au ſommet, paſſe par les centres de gravité de tous ces Eléments, & par conſéquent par celui de la pyramide. 2°, Que ſi une pyramide eſt triangulaire, chacune de ſes faces pourra être priſe pour la baſe de la pyramide, & l'angle oppoſé pour le ſommet: D'où il ſuit que *le centre de gravité de la pyramide triangulaire* SABC (fig. 46.) *eſt à l'interſection* G *de deux droites* SF, AE *tirées de deux angles* S, A *aux centres de gravité des faces oppoſées*; ou, ce qui eſt le même, *aux deux tiers de la longueur de chaque droite* SD, AD *tirée ſur le plan de chaque face oppoſée, depuis les angles* S, A *juſqu'au point* D *milieu du côté de la baſe oppoſé à ces angles.* Maintenant ſi l'on joint EF; à cauſe de $DF = \frac{1}{3}DA$, & $DE = \frac{1}{3}DS$, les triangles FDE, ADS ſont ſemblables, de ſorte que FE eſt parallele à AS, que $FE = \frac{1}{3}AS$, & que les triangles FGE, SAG ſont ſemblables, ce qui donne FE : AS ou 3FE :: FG : SG $= \frac{3FE \times FG}{FE} = 3FG$. Donc $SG = \frac{3}{4}SF$.

Si on diviſe enſuite la baſe d'une pyramide quelconque en tant de triangles qu'on voudra, on conçoit aiſément que chacun pourra être pris pour la baſe d'une pyramide, qui aura le même ſommet que la pyramide totale, qui deviendra pour lors compoſée d'autant de pyramides triangulaires. Or ſi par un point pris aux $\frac{3}{4}$ de la longueur d'une droite menée du ſommet de la pyramide totale au centre de gravité de ſa baſe, on imagine un plan parallele à cette baſe, toutes les droites tirées du ſommet de la pyramide, aux points quelconques de la baſe, ſeront auſſi coupées par ce plan aux $\frac{3}{4}$ de leur longueur; donc ce plan

Digitized by Google

paſſera par le centre de gravité de chaque pyramide triangulaire, ou du ſyſtême de pyramides qui compoſent la totale, & par conſéquent par le centre de gravité de la pyramide totale: Donc ce centre eſt aux $\frac{3}{4}$ de la longueur de la droite tirée du ſommet au centre de gravité de la baſe.

367. COROLL. I. *Le centre de gravité d'un cône droit ou oblique, eſt aux $\frac{3}{4}$ de ſon axe, en comptant du ſommet.*

368. COROLL. II. *Pour avoir le centre de gravité d'un cône ou d'une pyramide tronqués par un plan parallele à la baſe*, il faut ſuppoſer un levier dont le point d'appui eſt au centre de gravité du cône entier, ou de la pyramide entiere ; un bout eſt au centre de gravité du petit cône ou de la petite pyramide enlevés, & l'autre bout eſt au centre de gravité du reſtant.

369. PROBLEME VII. *Trouver le centre de gravité d'une demi-ſphere.*

SOLUTION. Soit AB (fig. 47) le diamétre de la demi-ſphere, & de ſon cylindre circonſcrit ABDE, que ſon égale DE ſoit le diamétre de la baſe du cône ECD. Il eſt évident (367) que le cône, qui n'eſt (Elem. 711.) que le tiers du cylindre, a ſon centre de gravité en F, à $\frac{3}{4}$ CI ; que le cylindre, dont la ſolidité eſt égale à celle de la ſphere & du cône priſes enſemble, a ſon centre de gravité en H, à $\frac{1}{2}$ CI : Donc FH $= \frac{1}{4}$ CI. Regardant le cylindre comme un point d'appui en H, le cône comme une puiſſance en F, & la demi-ſphere comme une puiſſance en G qui maintient l'équilibre, GH & HF ſeront en raiſon des ſolidités du cône & de la demi-ſphere, donc GH $= \frac{1}{2}$ HF $= \frac{1}{8}$ CI. Par conſéquent CG $=$ CH $-$ GH $= \frac{1}{2}$ C $- \frac{1}{8}$ CI. Donc IG $= \frac{1}{8}$ CI. C'eſt-à-dire, *le centre de gravité d'une demi-ſphere eſt aux $\frac{3}{8}$ de ſon épaiſſeur ou rayon, en comptant depuis le centre.*

370. THEOREME III. *Si pluſieurs poids ſuſpendus en différents points d'un levier droit, font un effort commun ſur un point d'appui de ce levier, la diſtance du point d'appui au point du levier où l'on tiendroit tous ces poids en équilibre, ſi ce levier n'étoit chargé que de ces poids, eſt exprimée par la ſomme des*

Digitized by Google

moments de chacun de ces poids par rapport au point d'appui, diviſée par la ſomme des maſſes des poids.

Par exemple ſi le levier $R\pi$ (fig. 40) portant un poids S, appliqué en R, ſe trouve en équilibre ſur le point d'appui A avec tant de poids M, m, μ qu'on voudra, je dis que le point Q (où l'on tiendroit les poids M, m, μ en équilibre ſi le levier n'étoit que $P\pi$, ou s'il n'étoit point chargé d'autres poids,) eſt tel, que $AQ = \frac{AP \times M + Ap \times m + A\pi \times \mu}{M + m + \mu}$.

DEM. L'effort que ſoutient le point A eſt égal à la ſomme de tous les efforts que chaque poids fait ſur lui: or l'effort ou moment de chaque poids eſt égal (334) au produit de ce poids par la perpendiculaire tirée du point d'appui ſur ſa direction: ainſi l'effort du poids M eſt $M \times AP$, celui de m eſt $m \times Ap$, & celui de μ eſt $\mu \times A\pi$. Mais parce que ces trois poids ſeroient en équilibre autour du point Q, ſi l'on ſuppoſe un poids E égal à la ſomme des trois poids M, m, μ, & qui ſoit ſuſpendu en Q, ſon moment $E \times AQ$ ſeroit égal à celui de tous les trois poids M, m, μ. Donc $E \times AQ$ ou $(M + m + \mu) \times AQ = M \times AP + m \times Ap + \mu \times A\pi$, & en diviſant, $AQ = \frac{M \times AP + m \times Ap + \mu \times A\pi}{M + m + \mu}$.

371. COROLL. I. Dans une courbe quelconque A Mμ (fig. 48) dont le ſommet eſt A, l'axe Aπ, une abſciſſe quelconque A P = x, ſon ordonnée, PM=y, ſi ſelon les principes du calcul infinitéſimal, on mene mp parallele & infiniment proche de PM, on aura Pp ou MR=dx, le petit eſpace pM ſera=$y\,dx$, & $\int y\,dx$ exprimera la quadrature de la courbe, ou l'aire compriſe entre ſa derniere ordonnée y, l'abſciſſe correſpondante x, & l'arc de la courbe compris entre la premiere & la derniere ordonnée. Si donc on regarde tous ces petits eſpaces $y\,dx$ comme autant de poids ſuſpendus à l'axe Aπ, & faiſant un effort commun ſur le point A, la même expreſſion $\int y\,dx$ repréſentera la ſomme de tous ces poids; l'effort du moment de chaque poids par rapport au point A ſera $x\,y\,dx$, & $\int x\,y\,dx$ exprimera la ſomme de tous ces moments. Donc la diſtance AQ du ſommet A au point Q de l'axe où tous ces poids reſteroient en équilibre, eſt $\frac{\int x\,y\,dx}{\int y\,dx}$. C'eſt une formule générale pour trouver le centre de gravité des courbes: puiſque ſi l'eſpace A$\pi\mu$MA étoit ſuſpendu librement au point Q, l'axe Aπ ſe tiendroit de niveau, & que s'il paſſoit de l'autre côté de l'axe, une branche ANB de la même courbe égale & ſemblable, le plan de

la courbe entiere terminée par une double ordonnée $B\mu$, resteroit horizontal en équilibre sur le point Q.

372. D'où l'on voit que *l'on ne peut avoir exactement le centre de gravité que des courbes dont on a la quadrature*; & réciproquement, que *l'on a la quadrature de toutes les courbes dont on peut déterminer géométriquement le centre de gravité.*

373. Pour faire voir l'usage de la formule $\frac{\int xy\,dx}{\int y\,dx}$ par quelques exemples. Soit B A μ une parabole: on a donc (Elém. 968) $\int y\,dx = \frac{2}{3}xy$, & à cause de $yy = x$, ou $x^{\frac{1}{2}} = y$, on a $\frac{2}{3}xy = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$. Par la même raison $\int xy\,dx = \int x^{\frac{3}{2}}\,dx$, qui par intégration devient $x^{\frac{5}{2}}$ ou $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$. Divisant donc cette quantité par $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}$, on a $\frac{3}{5}x$, ce qui fait voir que $AQ = \frac{3}{5}A\pi$.

374. De même le diamétre du cercle générateur d'une sphere étant $= 2r$, on a (Elem. 976) pour l'expression d'un des éléments ou cylindres infiniment minces qui composent la sphere, $cx\,dx - \frac{cxx\,dx}{2r}$: donc l'expression de son moment est $cx^2\,dx - \frac{cx^3\,dx}{2r}$. D'où il suit que la distance du sommet d'un segment de sphere à son centre de gravité, est égale à l'intégrale $\frac{1}{3}cx^3 - \frac{cx^4}{8r}$, (qui est la somme des moments), divisée par l'intégrale $\frac{1}{2}cxx - \frac{cx^3}{6r}$ de la premiere expression, (qui est la somme des masses ou cylindres élémentaires), on a donc en réduisant $\frac{8rx - 3xx}{12r - 4x}$ ou $\frac{2rx - \frac{3}{4}xx}{3r - x}$; ce qu'on peut prendre par cette analogie, comme $3r - x$ à $2r - \frac{3}{4}x$, ainsi x, qui est ici l'expression de l'épaisseur du segment de la sphere, est à la distance du sommet de ce segment à son centre de gravité.

375. Enfin on trouvera le centre de gravité d'une zone sphérique par le moyen de celui du segment, comme on trouve celui d'un cône tronqué, par le moyen du cône entier.

Propriétés des Centres de gravité.

Sur leurs mouvements, & sur la stabilité des Corps.

376. THEOREME I. *Si deux ou plusieurs corps sont mus uniformément dans un même plan ou dans des plans différents, le centre de gravité de leur système reste fixe, ou se meut uniformément.*

Digitized by Google

Car alors les moments étant conſtants, le point d'appui G le ſera auſſi.

I°, Si deux corps A, B, (fig. 49) dont le centre commun de gravité eſt en G, ſont mus dans la droite AB, en ſe rapprochant tous deux, ou en s'éloignant tous deux du point G, avec des vîteſſes en raiſon inverſe de leurs maſſes, ou ce qui eſt le même, avec des quantités égales de mouvement, le centre commun de gravité reſtera fixe au point G.

Car puiſque la vîteſſe du corps B eſt à celle du corps A comme BG à GA, les eſpaces parcourus ſeront en temps égaux (51) comme GB à GA; donc (Elem. 309.) les ſommes ou les différences de ces eſpaces & de GB, GA ſeront toujours dans la raiſon inverſe des maſſes; donc le centre de gravité reſtera toujours en G.

377. II°, Si deux corps A, B (fig. 50) dont le centre commun de gravité eſt en G, ſont mus uniformément en ſens contraire le long de deux paralleles A*a*, B*b*; enſorte que leurs quantités de mouvement ſoient égales, ou que leurs vîteſſes ſoient en raiſon inverſe des maſſes, ou comme AG à BG; le centre commun de gravité G reſtera auſſi fixe en G.

Car alors les triangles formés ſur les baſes A*a*, B*b* par les deux droites qui joignent les corps placés en A, B, puis en *a*, *b*, ſont (Elem. 569) ſemblables: donc ces deux droites s'entrecoupent en parties qui ſont entr'elles comme A*a* eſt à B*b*, & par conſéquent comme AG à BG: donc le point d'interſection de ces droites, eſt au centre commun G de gravité des deux corps.

378. III°, Soient deux corps A, B, dont le centre commun de gravité eſt G (fig. 51 & 52) qu'ils ſoient mus uniformément dans les paralleles A*a*, B*b*, avec des vîteſſes quelconques exprimées par les droites A*a*, B*b*. Soit *g* leur centre commun de gravité lorſqu'ils ſont arrivés l'un en *a* l'autre en *b*. Je dis que ſi l'on tire G*g*, ce ſera une droite parallele à A*a* ou à B*b*, & qu'elle ſera la route que le centre commun de gravité aura parcourue uniformément dans le même temps.

Digitized by Google

Car puiſque G, *g* ſont les points où ſont placés les centres de gravité, on a BG : *bg* :: BA : *ba*. Donc en prolongeant, (s'il eſt néceſſaire) les droites AB, *ab* juſques à leur rencontre en S, les triangles A*a*S, B*b*S ſont ſemblables, donc SB : S*b* :: BA : *ba* :: BG : *bg*. Donc SB $\pm$ BG : S*b* $\pm$ *bg* ou SG, S*g* :: SB : S*b*. Donc (Elem. 559) les triangles SG*g*, SB*b* ſont ſemblables, donc G*g* eſt parallele à B*b* (Elem. 509). Et parce que ce qu'on dit ici des corps A, B placés en *a b* peut s'appliquer à tous les points où ils ſe trouvent en même temps l'un ſur A*a*, l'autre ſur B*b*, il ſuit que chaque pas du centre commun de gravité ſe fait parallélement aux droites A*a*, B*b*; & qu'ainſi ce centre partant de G doit parvenir en *g*, par la droite G*g* parallele à A*a* ou B*b*.

379. De plus ſi à chaque pas que le corps A fait ſur A*a*, on tire une droite au point S, chacune de ces droites (prolongée s'il eſt néceſſaire) ira couper B*b* au point où le corps B doit ſe trouver alors. Chacune doit donc paſſer auſſi par leur centre commun de gravité; & comme ce centre eſt néceſſairement placé dans G*g* parallele à A*a*, les intervalles pris ſur G*g* entre ces droites menées au point S, ſeront toujours proportionnels aux longueurs des pas du corps A ſur la droite A*a*. Or ces intervalles pris ſur G*g*, ſont les pas du centre commun de gravité, correſpondants aux pas du corps A: Donc le mouvement de ce centre eſt toujours comme celui du corps A, c'eſt-à-dire, uniforme.

380. IV°, Soient les corps A, B (fig. 53) mus uniformément dans des directions obliques A*a*, B*b* avec des vîteſſes exprimées par A*a*, B*b*: ſoient G, *g* les lieux du centre commun de gravité, ſi l'on tire G*g*, & ſi par les points *a*, *b* on lui mene les paralleles *a*P, *b*Q, on pourra regarder les corps A, B, comme animés chacun de deux forces; le corps A, des forces AP, P*a*; & le corps B, des forces BQ, Q*b*. Or les forces AP, BQ ſont entr'elles comme AG à GB. Car à cauſe des paralleles Q*b*, G*g*, P*a*, on a (Elem 557) GP : GQ :: *ag* : *gb*. Or par la

propriété du centre de gravité $ag : gb :: AG : GB$. Donc $GP : GQ :: AG : GB$. Donc $AG - GP$ ou $AP : GB - GQ$ ou $BQ :: AG : GB$. Donc les forces AP, BQ ne peuvent (376) que contribuer à maintenir le centre commun de gravité en repos en G; donc elles n'ont nul effet pour mettre ce centre en mouvement. Mais les forces Pa, Qb animent les corps A, B, pour aller uniformément dans les paralleles Pa, Qb; donc c'eſt en vertu ſeulement de ces forces que le centre de gravité doit ſe mouvoir; donc il doit aller uniformément de G en g.

381. SCHOLIE I. Il eſt évident que cette démonſtration a lieu, ſoit que Aa, Bb ſoient dans un même plan, ſoit qu'elles n'y ſoient pas; & que ſi elles ſont dans un même plan, Gg s'y trouve auſſi.

382. SCHOLIE II. Comme le centre commun de gravité de deux corps peut être regardé comme le centre de gravité particulier à un corps, dont la maſſe ſeroit égale à la ſomme des maſſes des deux corps; qu'on peut enſuite comparer ce corps à un troiſieme, de la même maniere que nous avons comparé A à B; il eſt clair qu'on peut démontrer par des raiſonnements ſemblables aux précédents, que le centre de gravité d'un ſyſtême de trois corps mus uniformément dans un même plan, ou dans des plans différents, reſte en repos, ou eſt tranſporté uniformément en ligne droite. On peut enfin appliquer les mêmes raiſonnements à un ſyſtême de tant de corps qu'on voudra, pourvu qu'ils ſoient tous mus uniformément.

383. SCHOLIE III. Si on regarde les eſpaces Aa, Bb (fig. 51 & 52) comme des côtés homologues de deux Polygones ſymmétriques, concentriques & ſemblables, il eſt évident que Gg ſera auſſi un côté homologue d'un autre Polygone ſymmétrique, concentrique & ſemblable, ce qu'on pourra appliquer auſſi aux courbes, & en conclure, par exemple: *Que ſi tant de corps qu'on voudra décrivent en même temps chacun une courbe ſymmétrique, concentrique & ſemblable, en partant tous enſemble d'un point ou côté homologue, ou du point ou côté parallele oppoſé & correſpondant, le centre de*

Digitized by Google

gravité du ſyſtême de tous ces corps, ou même celui d'un ſyſtême compoſé de tant de ces corps qu'on voudra, reſtera fixe au centre commun des courbes, ou bien il décrira en même temps une courbe concentrique, ſymmétrique & ſemblable.

384. THEOR. II. *Les effets produits par le mouvement d'un ſyſtême de corps, doivent s'eſtimer de même que ſi tout ce ſyſtême étoit réduit en un point, égal en maſſe à la ſomme de toutes les maſſes, & placé au centre de gravité du ſyſtême.*

DEM. I. Soient deux corps A, B (fig. 51 & 52) dont les maſſes ſoient exprimées par M, N : que leur centre de gravité commun ſoit en G, qu'ils ſoient mus dans les paralleles Aa, Bb, on a par la nature du centre de gravité & par la conſtruction des figures, où bD eſt parallele à AB. $M : M+N :: BG : BA :: bE : bD :: Eg : Da$. Donc $Eg \times (M+N) = Da \times M$. Or à cauſe de $Gg = B\,b \pm Eg$, (+ eſt pour la fig. 51, & — pour la fig. 52) on a $Gg \times (M+N) = B\,b \times (M+N) \pm Eg \times (M+N) = B\,b \times (M+N) \pm Da \times M = (B\,b \pm D\,a) \times M + B\,b \times N = \pm A\,a \times M + B\,b \times N$. Donc $Gg \times (M+N) = \pm A\,a \times M + B\,b \times N$. C'eſt-à-dire, que la quantité de mouvement de la ſomme M + N des maſſes, placée au centre commun G de gravité, eſt égale à la ſomme des quantités de mouvement de chaque corps A, B s'ils vont dans le même ſens, ou à leur différence, s'ils vont en ſens contraire; ou, ce qui revient au même, elle produit ſeule le même effet, que les deux corps A & B enſemble.

385. II°, Si les directions Aa, Bb, (fig. 54) ne ſont pas paralleles, on les pourra décompoſer chacune en deux, ſavoir en AE, BH paralleles à ab, & en aE, bH paralleles à Gg route du centre commun de gravité. Or à cauſe des paralleles EP, QH les triangles AEP, BQH ſont ſemblables : Donc AP : BQ :: AE : BH. Donc $AP \times M : AE \times M :: BQ \times N : BH \times N$. Or (380) AP : BQ :: AG : BG :: N : M; donc $AP \times M = BQ \times N$; & par conſéquent, (Elem. 306) $AE \times M = BH \times N$: & parce que ces deux expreſſions ſont celles des quantités de mouvements des corps A & B, leſquelles étant paralleles à ab

égales, & en ſens oppoſé, ſont entiérement nulles à l'égard de ab, reſte donc que $Ea \times M$, & $Hb \times N$, ſoient les expreſſions des quantités de mouvement des corps A & B à l'égard de ab. Mais à cauſe des paralleles EP, QH, on a (Elem. 569) GP : GQ :: GE : GH. Or (380) GP : GQ :: N : M. Donc GE : GH :: N : M. Donc G eſt la place du centre commun de gravité des puiſſances M, N qui placées en E, H, ſont mues vers ab, ſelon les directions Ea, Hb paralleles entr'elles & à Gg. Donc (72) leurs quantités de mouvement réunis n'équivalent qu'à celle d'une ſeule puiſſance en G égale à la ſomme de leurs maſſes.

386. SCHOLIE I. Ce qu'on dit ici de deux corps A, B peut s'appliquer à tant de corps A, B, C, D, &c. qu'on voudra, parce qu'on peut réduire la quantité de mouvements des deux premiers A, B, à celle d'un ſeul K égal en maſſe à celles de A & de B, & placé à leur centre commun de gravité, puis raiſonner de même ſur K & C, en les réduiſant à un ſeul corps L égal en maſſe à la ſomme de celles de A, B, C, & placé au centre de gravité du ſyſtême de ces trois corps, & ainſi ſucceſſivement.

387. SCHOLIE II. On peut regarder la droite ab (fig. 55 & 56) comme recevant l'effort des corps A, B qui la viennent frapper en même temps avec des vîteſſes exprimées par les droites Aa, Bb. Si donc par les points A, B, G, on abaiſſe ſur ab les perpendiculaires AK, BL, GE, il eſt clair, 1°, que $M \times AK$, $N \times BL$, & $(M+N) \times GE$ ſeront (334) les expreſſions des moments, ou des efforts de trois puiſſances ſur la droite ab : 2°, qu'à cauſe des directions paralleles Aa, Gg, Bb, & des perpendiculaires auſſi paralleles AK, GE, BL, les triangles Aak, GgE, BbL ſont ſemblables, donc les vîteſſes Aa, Gg, Bb ſont entr'elles comme ces perpendiculaires : donc en ſubſtituant le rapport des perpendiculaires à celui des vîteſſes, on verra également que le moment du centre commun de gravité G produit ſeul à l'égard de la droite ab le même effet que les moments réunis des corps A, B : & en général, que *d'un ſyſtême quelconque de corps placés*

Digitized by Google

dans des plans quelconques, & mus le long de lignes tellement disposées qu'ils puissent frapper en même temps une même droite, le moment du centre de gravité de ce système par rapport à cette droite, équivaut à tous les moments réunis de chacun des corps qui composent ce système.

388. SCHOLIE III. Si les corps n'étoient pas tous dirigés à une même droite, mais à un même plan, on concluroit la même chose par rapport à ce plan, que l'on vient de voir par rapport à cette droite. Car on pourroit comparer de même les moments réunis de deux de ces corps tendants vers ce plan par deux directions paralleles, ou décomposées chacune en deux, les unes paralleles à la route du centre de gravité commun des deux corps comparés; les autres paralleles au plan; on pourroit, dis-je, les comparer avec le moment d'un point égal à la somme des masses de ces deux corps, & placé à leur centre commun de gravité; puis le moment de ce point & celui d'un troisieme corps, au moment de leur centre commun de gravité, & ainsi de suite.

389. THEOREME III. *Le mouvement du centre commun de gravité de deux corps sphériques à ressort parfait, n'est altéré ni détourné par le choc.*

DEM. Puisque (189) à des instants également éloignés de celui du choc, les droites AB, IH (fig. 17) qui joignent les centres des corps A, B sont égales entr'elles, il suit que le centre de gravité commun des corps A, B qui divise toujours dans un même rapport la droite qui les joint, est placé de la même maniere sur AB & sur IH, en sorte que s'il est en R sur AB, il est en T sur IH, & que AR = HT ou RB = IT. Et parce que d'ailleurs les droites AB, IH sont également inclinées par rapport à l'axe de contact GL, (à cause de l'égalité des Trapezes ABFG, LIHP appliqués par leurs angles droits sur GL, il suit qu'aux instants également éloignés de celui du choc, les pas du centre commun de gravité étant faits sur des droites égales, également inclinées, & également éloignées par rapport à l'axe de contact, ils sont égaux entr'eux, & ils

Digitized by Google

écartent également ce centre de l'axe de contact GL. Donc on a non-seulement SR = ST, mais aussi les perpendiculaires RX & TO, qui mesurent les écarts à l'égard de GL, sont égales entr'elles, & les triangles rectangles RXS, TSO sont égaux & semblables. Or 1°, dans ces triangles les côtés SX, SO sont dans une même droite; donc les côtés RS, ST sont aussi dans une même droite; donc la route du centre de gravité n'a pas été détournée par le choc. 2°, Avant le choc le centre commun de gravité est parvenu uniformément de R en S (380): donc après le choc, il est parvenu uniformément de S en T; donc son mouvement n'a pas été altéré par le choc.

390. SCHOLIE. Puisque (187) les corps sans ressort vont après un choc oblique dans des directions paralleles, & après avoir perdu une partie de leurs forces, il est clair que la route de leur centre commun de gravité est détournée par ce choc. Et il est facile de concevoir que cet effet n'arrive pas dans le choc des corps à ressort parfait, parce que la force de restitution est égale & directement opposée à celle de la compression, & qu'ainsi le choc ne détruit rien dans les forces, il ne fait qu'en changer ce qu'elles avoient d'opposé, en des directions contraires. De-là on pourra conclure, que *lorsque l'action des corps à l'égard les uns des autres sera mutuelle, & ne tendra qu'à faire changer en sens contraire ce qu'elles ont d'opposé dans leurs directions, le mouvement de leur centre commun de gravité ne sera détourné ni altéré par l'effet de ces actions.* Tels seroient des corps qui s'attireroient ou se repousseroient mutuellement.

391. THEOR. IV. *La droite* CH (fig. 5) *qui est la direction & l'expression de la force composée des forces* CD, CA, CE, CG, *passe par le centre de gravité* L *des points* D, A, E, G, *où les forces sont censées appliquées, & elle est égale au produit de* CL *multipliée par le nombre des forces composantes.*

DEM. La droite CB est la direction & l'expression d'une force composée des forces CD, CA, & elle passe par le point M milieu de la diagonale DA, où est le centre de gravité des points D, A, en sorte que CB = 2CM = CM×2. De même CK passe par le centre de gravité N

Digitized by Google

des points E, G, & elle eſt = CN × 2. Or CH repréſente la force compoſée des forces CB, CK : ſi donc on tire MN & BK, les triangles CMN, CBK ſeront ſemblables (Elem. 559) puiſque CM = ½CB, & CN = ½CK. Donc 1°, à cauſe de BR = KR, on a ML = LN, & par conſéquent L eſt le centre de gravité des points M, N, ou des points D, A, E, G. 2°, CL = ½CR = ¼CH, ou CH = CL × 4. Donc CH paſſe par le centre de gravité L des points D, A, E, G, & eſt égale à CL multipliée par le nombre de ces points.

392. COROLL. I. *Si par les points où ſont placées trois puiſſances en équilibre autour d'un point* C, *on tire les droites qui forment un Triangle, le point* C *ſera le centre de gravité de ce Triangle.*

393. REM. Cette propriété du centre de gravité a lieu, ſoit que le point C ſoit dans le plan qui paſſe par les trois points où ſont placées les puiſſances, ſoit que ce point C ſoit hors de ce plan, puiſque (89) les forces PC, QC, *p*C (fig. 4) ſe réduiſent à la ſeule BC, en compoſant d'abord la force AC des deux PC, QC qui ſont dans un même plan, de ſorte que cette force compoſée paſſe par le centre de gravité N des points P, Q, & eſt = 2CN : puis en compoſant la force BC des forces AC, *p*C, qui ſont dans le plan diagonal, & où l'on voit, comme ci-deſſus, que cette force BC paſſe par le centre commun de gravité L des points N, *p*, c'eſt-à-dire, des points P, Q, *p* ; & qu'enfin CL = ⅓CB.

394. COROLL. II. *Si quatre puiſſances placées en* A, B, C, S (fig. 46) *& qui ne ſont pas dans un même plan, ſont en équilibre autour d'un point* G *ſur lequel elles agiſſent à la fois ſelon des forces exprimées par les droites* AG, BG, CG, SG, *le point* G *eſt le centre de gravité d'une Pyramide* SABCA *aux angles de laquelle ſont terminées les droites qui repréſentent ces forces.* Car ſoit F le centre de gravité du Triangle ABC, il eſt clair (387) que FG ſera la direction d'une force équivalente à la force compoſée des forces AG, BG, CG, & que cette force compoſée eſt = 3FG. Or la force SG faiſant équilibre, il faut 1°, qu'elle ſoit dans la direction

Digitized by Google

opposée à FG, 2°, qu'elle soit égale à 3FG. Donc (366) le point G est le centre de gravité de la pyramide SABCA.

395. THEOREME V. *Toute surface ou tout solide formé par un mouvement quelconque d'une ligne ou d'une surface, est égal au produit de cette ligne ou de cette surface multipliée par le chemin que son centre de gravité a parcouru.* *

DEM. On peut considérer les surfaces & les corps solides, comme formés de matiere homogene de même densité; & alors on conçoit qu'on peut représenter ces surfaces & les solidités de ces corps par leur poids. Or il est évident qu'un poids formé par le mouvement d'un poids générateur, est égal à ce poids générateur pris autant de fois qu'il a fait de pas. Mais (202) le poids d'une quantité quelconque est censé résider dans son centre de gravité: donc le nombre des pas du poids est déterminé par le nombre des points de la route du centre de gravité; donc *pour avoir le poids ou le volume d'une figure produite par une ligne ou par une surface quelconque, il faut multiplier le poids de la quantité génératrice, c'est-à-dire, la quantité génératrice même, par la route de son centre de gravité.*

Par exemple, un cylindre étant produit (Elem. 656) par un rectangle *ab* qui tourne sur un de ses côtés *a*: le centre de gravité de ce rectangle est éloigné du côté *a* de $\frac{1}{2}b$: soit le rapport du rayon d'un cercle à sa circonférence $\frac{7}{44}$, la route du centre de gravité sera $\frac{22b}{7}$; (car $7 : 44 :: \frac{1}{2}b : \frac{22b}{7}$). En la multipliant, suivant ce Théorême, par *ab* surface du rectangle, on aura $\frac{22abb}{7}$ pour la solidité du cylindre. Suivant les Eléments (709) cette solidité est égale au produit de la hauteur *a* par la surface de la base, laquelle étant un cercle dont le rayon est *b*, est égale à $\frac{22bb}{7}$.

* Ce Théorême qui contient un principe d'un très-grand usage dans la Géométrie pour trouver les dimensions de toutes sortes de figures & de solides, & dans la Méchanique pour trouver les centres de gravité des figures ou solides, dont on connoit les dimensions, s'appelle communément la *Régle de Guldin*, parce que le P. Guldin, Jésuite, est le premier qui l'ait développé; il paroît par les Ouvrages de Pappus qu'il n'étoit pas inconnu aux Anciens.

Digitized by Google

Pour avoir la surface du cylindre par cette regle, il faut considérer que cette surface a été produite par la rotation d'une ligne a à la distance b de l'axe de révolution; la route du centre de gravité est donc un cercle $\frac{44b}{7}$: en le multipliant par la quantité génératrice a, on aura $\frac{44ab}{7}$ pour la surface cherchée, ce qui est conforme aux Eléments (690).

396. THEOREME VI. *Si la ligne de direction* DF (fig. 57) *passe par la base* CE *d'un corps* AEC *posé sur un plan horizontal, & qui n'est poussé d'ailleurs ni retenu par aucune autre force que par celle de sa pesanteur, ce corps restera debout, quelle que soit sa figure.*

DEM. Car s'il pouvoit tomber, ce ne seroit qu'en tournant sur un de ses angles C, & alors son centre de gravité D seroit obligé de décrire l'arc DG qui a CD pour rayon, lequel étant plus long que DF, fait voir qu'il faudroit que ce centre de gravité s'élevât jusqu'en H au-dessus du plan CE, ce qui est impossible, à cause que la pesanteur, qui est la cause de la chûte des corps, pousse toujours leur centre de gravité en embas.

397. THEOREME VII. *Si la ligne de direction d'un corps passe au-delà de sa base, il tombera, sur quelque plan qu'il soit posé.*

DEM. Car, par exemple, le corps AEC étant dans la position aeC, où sa direction df passe au-delà de sa base Ce, il doit tomber, parce que sa pesanteur tend à faire approcher de plus en plus son centre de gravité vers celui de la terre, & par conséquent à lui faire décrire l'arc dG, dont tous les points approchent de plus en plus du plan CE, c'est-à-dire du centre de la terre.

398. THEOR. VIII. *Si la ligne de direction* ck (fig. 58) *passe par la base* ad *d'un corps posé sur un plan incliné, ce corps glissera.*

DEM. Car alors la pesanteur représentée par ck étant plus grande que la force ce qui le retient sur le plan incliné (261) doit faire glisser ou rouler le corps le long de ce plan; mais pour le faire descendre en roulant, il faudroit

que

que le centre de gravité *c* décrivît autour du point *d* un arc dont le rayon *cd* fût plus grand que *ck*, & que par conſéquent il s'élevât davantage ſur le plan incliné, ce qui ne peut arriver en vertu de la gravité ſeule. Reſte donc qu'il deſcende en gliſſant.

399. THEOR. IX. *Si la ligne de direction d'un polyhedre poſé ſur un plan incliné, paſſe toujours en dehors de la face qui porte ſur ce plan, le polyhedre deſcendra en roulant à cauſe du frottement de cette face ſur ce plan.*

Car ſi CK (fig. 58) repréſente la quantité abſolue de la peſanteur qui agit ſur le polyhedre, CE perpendiculaire au plan incliné repréſentera ce que ce plan en ſupporte, ou ce que le plan détruit de cette quantité, & CF parallele au plan repréſente ce qui reſte de la peſanteur, ou ſon effort relatif. D'où il ſuit que puiſque les mouvements ne ſont produits qu'en vertu des forces relatives, & dans la direction de ces forces relatives (86), le Polyhedre n'eſt porté, en vertu de la force CF, qu'à ſe mouvoir parallélement au plan incliné. Donc s'il ne ſe rencontroit pas d'autres circonſtances dans ce mouvement, le polyhedre gliſſeroit ſur ſa face AB, le long du plan incliné : mais en commençant à gliſſer, cette face éprouve une réſiſtance par ſon frottement ſur le plan incliné, & cette réſiſtance fait l'effet d'une force qui agiroit ſur le Polyhedre (déja mu ſelon CF) dans la direction EG qui ne paſſe pas par ſon centre de gravité. On verra dans la ſuite (457 & 458) que cette force doit détruire une partie du mouvement ſelon CF, & procurer en même temps une rotation au Polyhedre, qui le fera trébucher ſur la face BH, & ainſi ſucceſſivement.

400. SCHOLIE. Si la perpendiculaire CE tomboit en dehors de la face AB, il eſt évident (397) que le polyhedre trébucheroit indépendamment du frottement, & que par conſéquent il tendroit à gliſſer & à trébucher en même temps.

401. THEOR. X. *Un corps quelconque* ABDEF (fig 59) *dont une des faces* BD *eſt poſée ſur un plan incliné, ne peut être*

retenu sur cette face par une puissance quelconque R, *qui l'attire vers le sommet de ce plan incliné, à moins que cette puissance n'agisse suivant une ligne qui aille rencontrer la ligne de direction* IL *de la pesanteur de ce corps, en quelqu'un des points compris entre* I *&* K, *où aboutissent les perpendiculaires au plan incliné* ID, KB *tirés par les extrémités de la face de ce corps, qui porte sur le plan incliné.*

DEM. Je dis que si la puissance R, qui fait monter le corps le long du plan, agit selon une droite RE, qui rencontre la ligne de direction IL en un point H, qui soit en-deçà ou au-delà des limites I, K, le corps culbutera sur la face AB. Car si du point H auquel on peut supposer que la puissance R est appliquée (204), on abaisse sur le plan incliné la perpendiculaire HM, & si du point M on tire MN parallele à IL, & ML parallele à RH, on a le parallélogramme HLMN dans lequel HL représente le poids du corps, ou l'effort de sa pesanteur, HN l'effort de la puissance R, & HM la charge du plan incliné. On peut donc substituer la force HM aux deux forces exprimées par HN & HL : Or HM passe au-delà de la base BD du corps; donc (399) l'effort exprimé par HM fera culbuter le corps sur la face AD, quel que soit l'effort de la puissance R.

402. COROLL. *Si on applique une puissance à un point quelconque de la surface d'une sphere, pour la retenir sur un plan incliné, la sphere tournera jusqu'à ce que la direction de cette puissance passe par le centre de gravité de la sphere.* Ce qu'on peut appliquer à tous les corps dont la surface est courbe, lorsque ces corps ne peuvent toucher un plan incliné que dans un point.

403. REMARQUES. Une boule posée sur un plan horizontal reste immobile, parce que sa direction passe par sa base, c'est-à-dire par le point de contact : mais pour peu que le plan soit incliné, elle roule en enbas, parce que sa direction ne passe plus par le point de contact.

C'est pour éviter la chûte que les animaux se ployent naturellement le corps en arriere lorsqu'ils descendent, & en avant lorsqu'ils montent : Que les hommes portent le

Digitized by Google

corps de droite à gauche, & de gauche à droite à chaque pas qu'ils font : Que ceux qui portent un fardeau sur le dos, baissent la tête : Que ceux qui portent un fardeau qui pend à une main, étendent l'autre : Que ceux qui sont replets se tiennent droits. Toutes ces postures qu'on prend involontairement, ne servent qu'à faire constamment passer la ligne de direction par les pieds, sans quoi on tomberoit infailliblement.

Une boule posée sur un plan horizontal, puis frappée dans une direction qui passe par son centre, va cependant en roulant sur ce plan, quoiqu'elle y dût glisser dans cette supposition ; mais il est évident par ce qu'on vient de dire (399) que le frottement en est la cause.

TROISIEME PARTIE.

Des Mouvements en ligne courbe.

404. IL est clair que le mouvement primitivement imprimé à tout corps, (qui n'a par lui-même que de l'inertie,) ne peut continuer à être uniformément le même, si le corps n'est absolument abandonné à lui-même, & s'il ne se trouve dans un milieu parfaitement libre. Mais 1°, si le corps se trouve exposé à l'action continuelle de quelque force étrangere, telle qu'est la pesanteur ; 2°, ou si l'un de ses points se trouve inébranlable, ou assujetti à ne pouvoir être mu que d'une certaine façon, comme s'il ne pouvoit couler que dans une rainure, &c. 3°, ou si le corps est lié à un ou à plusieurs autres corps en repos ou en mouvement, soit que les liens soient flexibles, soit qu'ils soient inflexibles. 4°, ou si le milieu où le corps se trouve, fait une résistance par la difficulté plus ou moins grande de le pénétrer. 5°, ou si le corps frotte sur quelque surface, &c. Enfin si le corps se trouve dans deux ou dans plusieurs de ces circonstances à la fois, il est évident que son mouvement primitivement imprimé, doit être modifié à tout moment par autant de forces particulieres.

Ces forces s'appellent *accélératrices* ou *rétardatrices*, selon qu'elles tendent à accélérer ou à retarder la vîteſſe du mouvement primitivement imprimé ; & il eſt évident que le corps ſuit néceſſairement un mouvement compoſé de la force qui lui a été primitivement imprimée, & de chacune de celles qui l'affectent dans les circonſtances où il ſe trouve : de ſorte qu'on ne peut connoître le mouvement que le corps ſuivra réellement, ſi on ne trouve des expreſſions exactes de chacune de ces forces en particulier, leurs directions, & ſi l'on ne fait une combinaiſon exacte de tous leurs efforts réunis, pour produire le mouvement compoſé dont il s'agit. Cette partie de la Méchanique s'appelle communément *la Dynamique*.

Comme la combinaiſon des forces différentes produit preſque toujours des mouvements en ligne courbe, nous examinerons ici ce qu'il y a de plus intéreſſant dans ces ſortes de mouvements, ſur leſquels cependant on ne peut faire de recherches un peu profondes, qu'à l'aide de la Géométrie & de l'Analyſe infinitéſimale la plus ſublime.

ARTICLE I.

Origine & propriétés générales du Mouvement en ligne courbe.

405. THEOR. I. *UN mouvement inégal quelconque ſoit rectiligne, ſoit curviligne, peut être regardé comme une ſuite infinie de mouvements rectilignes & uniformes pendant chaque inſtant infiniment-petit de la durée finie de ce mouvement. Et on peut concevoir, que ce n'eſt qu'au commencement de chacun de ces inſtants infiniments-petits, que le mobile reçoit une variation dans ſa vîteſſe & dans ſa direction, leſquelles ſubſiſtent, ſans varier davantage, pendant toute la durée de cet inſtant infiniment-petit.*

Car pendant chaque inſtant infiniment-petit un mobile ne peut faire qu'un pas : Un pas comparé au ſuivant peut

Digitized by Google

bien ne lui être pas égal, ni dans la même direction ; mais on ne peut concevoir d'inégalité ni de détour dans un pas infiniment-petit pris séparément.

406. COROLL. *On peut* donc, *pour chaque instant infiniment-petit, exprimer les circonstances actuelles d'un mouvement quelconque par les propriétés & par les formules du mouvement rectiligne & uniforme.*

407. THEOR. II. *Un corps animé par deux puissances à la fois ou par tant de puissances qu'on voudra, réduites par la composition à deux seules, dont les directions font un angle, décrit une ligne droite, si ces deux puissances sont de même nature*, c'est-à-dire, ou toutes deux uniformes, ou toutes deux variables suivant une même loi, &c. *Mais si ces deux puissances sont de différente nature, il décrit une courbe (qu'on appelle en général une* Trajectoire,) *dont l'espece dépend du rapport que les efforts de ces deux puissances ont entr'eux à chaque instant.*

DEM. Soient deux puissances quelconques qui animent le corps C (Fig. 60 & 61) dans les directions CD, CA, dont l'une soit capable de pousser le corps de C en D en trois instants infiniment-petits égaux, & l'autre de C en A pendant les trois mêmes instants. Ayant divisé CD & CA chacune en trois parties, suivant les rapports qu'ont entr'elles ces deux puissances, & ayant achevé les parallélogrammes GE, HF, AD, il est clair, 1°, Qu'à la fin du premier instant le corps se trouvera en I, à la fin du second en K, à la fin du troisieme en B. Car à cause des instants infiniment-petits, chacune de ces puissances agit uniformément pendant leur durée : donc au commencement du premier instant le corps étant animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en E, l'autre de C en G dans le même temps, doit être en I à la fin de cet instant. Et parce que les deux premiers instants pris ensemble ne forment encore qu'un temps infiniment-petit, on peut supposer, en faisant abstraction du premier instant, qu'au commencement du mouvement le corps est animé de deux forces capables de le pousser l'une de C en F, l'autre de C en H pendant un certain même temps; donc à la fin de ce temps le corps

Digitized by Google

ſera en K au bout de la diagonale CK. De même à cauſe que la ſomme des trois inſtants ne fait qu'un temps infiniment-petit, on peut ſuppoſer, en faiſant abſtraction des deux premiers inſtants, qu'au commencement du mouvement le corps eſt ſollicité d'aller de C en D, & en même temps de C en A; & par conſéquent il doit aller de C en B, & ſe trouver en B à la fin du troiſieme inſtant.

2°. Il eſt évident que ſi les puiſſances ſont de même nature (fig. 60) les droites CA, CD, ſont diviſées dans une même raiſon, & par conſéquent les lignes CE, CF, CD, ſont reſpectivement proportionnelles aux lignes CG, CH, CA. Or à cauſe des parallélogrammes, les angles CEI, CFK, CDB, ſont égaux, & les droites EI, FK, DB, égales aux lignes CG, CH, CA, ſont par conſéquent proportionnelles aux lignes CE, CF, CD. Donc les triangles CEI, CFK, CDB, ſont ſemblables (Elem. 559); donc leurs angles en C ſont égaux, donc les côtés CE, CF, CD, étant tous dans une même droite CD, leurs côtés CI, CK, CB, & par conſéquent les points C, I, K, B, ſont auſſi en ligne droite. Donc ſi les deux puiſſances ſont de même nature, elles font aller le corps en ligne droite.

Mais ſi les deux puiſſances ſont de différente nature, comme ſi CD (fig. 61) repréſentoit une puiſſance uniforme, & CA une force accélératrice conſtante, les droites EI, FK, DB, ne ſont pas proportionnelles aux droites CE, CF, CD; car CG eſt plus petite que GH, tandis que CE=EF. Donc les triangles CEI, CFK, CDB, ne ſont pas ſemblables, & par conſéquent leurs angles en E, F, D, étant égaux, leurs angles en C ne le ſont pas : donc les côtés CE, CF, CD, étant couchés ſur une même droite, les côtés CI, CK, CB, ne le ſont pas; donc les points C, I, K, B, ne ſont pas en ligne droite.

3°. Si on regarde CA comme un diametre de la courbe CIKB, les parties CG, CH, CA, ſeront des abſciſſes, & les paralleles GI, HK, AB, les ordonnées; ou bien ſi on rapporte la courbe à CD, les parallélogrammes GE, HF, AD ſeront les parallélogrammes des coordonnées (Elem.

Digitized by Google

775). Or (Elem. 767) la nature d'une courbe dépend du rapport constant des fonctions des abscisses aux fonctions des ordonnées. Donc *la courbe décrite en vertu de deux forces de différente nature, dépend du rapport que ces deux forces ont entr'elles à chaque instant.*

408. Par exemple, dans l'hypothese précédente, la courbe CIKB est une parabole. Car la force exprimée par CD étant uniforme, les espaces CE, CF, CD, sont entr'eux comme les temps, & par conséquent ces droites, ou leurs égales GI, HK, AB, représentent les temps comptés depuis le commencement du mouvement : & la force suivant CA étant accélératrice constante, les espaces CG, CH, CA, sont entr'eux (99) comme les quarrés des temps, ou comme les quarrés des droites GI, HK, AB. Donc la courbe CIKB est telle, que ses abscisses CG, CH, CA sont entr'elles comme les quarrés des ordonnées GI, HK, AB. Donc (Elem. 821) c'est une parabole.

409. Pour faire concevoir ceci par un exemple plus général : *Soit un corps* P (fig. 62) *animé de deux forces, l'une toujours uniforme*, & qui par conséquent tende à le faire aller uniformément dans la direction où il se trouve à la fin de chaque instant, & *l'autre constante ou variable à volonté, mais toujours dirigée à un même point fixe* S, *vers lequel elle tâche sans cesse de ramener le corps* P ; *ce corps décrira une courbe* PQ*p*O, *toujours concave du côté du point fixe* S.

Car si on partage une durée finie quelconque de ce mouvement en instants infiniment-petits égaux, & si on suppose que le corps P ayant déja parcouru l'espace infiniment-petit PQ, vienne à recevoir au commencement de l'instant suivant une impression vers S exprimée par la droite QG, il est clair que le corps P, qui sans cette nouvelle impression étant abandonné à sa seule force uniforme, auroit parcouru pendant cet instant l'espace QF égal & dans la même ligne que PQ, est contraint de parcourir la diagonale Q*p* du parallélogramme QF*p*G, & qu'il se trouve en *p* à la fin de cet instant. Par la même raison à la fin de l'instant suivant, le corps se trouveroit en E, en-

Digitized by Google

ſorte que $p\,E = Q\,p$, s'il ne recevoit au commencement une nouvelle impreſſion vers S exprimée par $p\,H$, (or $p\,H = QG$, ſi la force dirigée au point S eſt toujours conſtante, & ces deux quantités ſont inégales, ſi cette force eſt variable), laquelle l'oblige à ſuivre la diagonale $p\,O$. Ainſi l'effort continuel de la force uniforme compliqué avec celui de la force qui ramene toujours le corps vers S, fait décrire au corps P la courbe $P\,Q\,p\,O$ concave vers le point S, & dont la nature dépend auſſi du rapport des deux forces, & de leurs poſitions à chaque inſtant.

410. Si, par exemple, la ligne SQ (fig. 63) eſt perpendiculaire à PF direction de la force uniforme, & ſi les quantités PI, QG, $p\,H$, dont la force centrale ramene à chaque inſtant le corps vers S, ſont préciſément égales aux quantités QR, $p\,F$, OE, dont la direction de la force uniforme écarte le corps du point S, il eſt clair que la courbe $P\,Q\,p\,O$ eſt un cercle, parce que par la combinaiſon de ces deux forces, le corps eſt toujours également éloigné du point S.

411. REMARQUE. Comme la combinaiſon de l'effet de pluſieurs forces réunies eſt infinie, nous examinerons ſeulement les mouvements curvilignes qui ſont les plus ordinaires : or de tous ces mouvements il n'y en a preſqu'aucun qui ne ſe rapporte principalement à quelque point déterminé & cenſé fixe. Les corps qui tournent en rond, les Planetes, par exemple, ſe rapportent à quelque centre, les corps jettés obliquement en l'air décrivent des courbes qui ſe rapportent au centre de la terre ; en général on ne trouve gueres dans la nature de mouvement en ligne courbe, qui ne ſoit l'effet conjoint d'une impulſion conſtante & uniforme ſuivant une direction quelconque, & d'une ou pluſieurs forces variables ſuivant une certaine loi, qui pouſſe ou attire en même-temps vers certains points déterminés.

412. La force qui pouſſe ou qui attire vers un certain point un corps qui a reçu une impulſion conſtante dans une direction quelconque, s'appelle *force centrale*. Elle s'appelle *force centripete* quand on la conçoit inhérente au corps :

Digitized by Google

ainſi on peut regarder la peſanteur d'une pierre, (quelle qu'en ſoit la cauſe,) comme une force centripete qui y réſide, & qui la ſollicite ſans ceſſe à s'approcher du centre de la terre. Et comme l'effet de l'impulſion conſtante eſt de tendre toujours à faire décrire uniformément une ligne droite, le corps qu'elle anime dans une direction différente de celle qui tend à ce centre, tend à s'en éloigner, & la partie de ſa force abſolue qui l'en écarte de la ſorte, s'appelle ſa *force centrifuge*. Cet effort eſt égal & dans la direction oppoſée à la force centripete : car il n'eſt autre choſe qu'une réaction. C'eſt pourquoi on les conſidere ſous le nom commun de force centrale.

413. Nous renvoyons au Traité d'Aſtronomie la théorie des forces centrales dans les mouvements curvilignes en général, & en particulier dans ceux des corps qui tournent comme les Planetes & les Cometes. Ainſi après avoir donné quelques principes généraux ſur les mouvements en ligne courbe, nous traiterons du mouvement de *projection*, c'eſt celui des corps jettés obliquement; nous expliquerons enſuite le mouvement de *rotation* & celui d'*oſcillation*.

Principes généraux ſur les Mouvements en ligne courbe.

414. THEOR. III. *Si un corps* B (fig. 64) *eſt mu le long d'une courbe* ABCD, ou ce qui revient au même, *ſi un corps gliſſe dans la concavité d'un ſolide quelconque* (non élaſtique & ſans frottement), *le changement de direction qu'il eſt obligé de faire à chaque côté infiniment-petit de la courbe, ne lui fait perdre de ſa vîteſſe qu'une quantité infiniment-petite du ſecond ordre.*

DEM. Si après que le corps B a décrit le côté infiniment-petit BC avec une vîteſſe finie quelconque, exprimée par BC, & en vertu d'une force finie quelconque repréſentée auſſi par BC, il eſt contraint de ſe détourner dans la direction CD inclinée au côté BC de la quantité de l'angle infiniment-petit BCM; alors on peut regarder la droite CD comme un obſtacle qui s'oppoſe au mouvement uni-

Digitized by Google

forme du corps B dans ſa premiere direction BC, & par conſéquent la force finie BC ſe décompoſe en deux, l'une dans une direction parallele à CD, exprimée par BN ou MC, & l'autre dans une direction perpendiculaire à CD, exprimée par BM ou NC. La force exprimée par BN qui eſt finie, ſubſiſte toute entiere après le détour, & c'eſt en vertu de cette force ſeule que le corps B décrit le côté CD, en un temps égal à celui qu'il a employé à décrire le côté BC, & par conſéquent CD eſt égale à BN; la force exprimée par NC ou BM, eſt un infiniment-petit du premier ordre, parce qu'elle eſt le ſinus de l'angle infiniment-petit BCM, dont BC, (qui exprime une force finie) eſt le rayon; NC exprime la force avec laquelle le corps B agit ſur le côté CD de la courbe pendant qu'il le décrit; mais cette force eſt totalement perdue pour la vîteſſe (185). Ainſi la vîteſſe du corps B après le détour, eſt à la vîteſſe avant le détour, comme BN à BC. Si donc du centre B, avec le rayon BN, on décrit le petit arc N*i*, alors B*i* étant égal à BN, C*i* exprime la perte de la vîteſſe cauſée par le détour. Or l'arc N*i* eſt une petite droite qui tombe de l'angle droit N, perpendiculairement ſur l'hypothénuſe BC du triangle rectangle BNC. Donc (Elem 561) NC eſt moyen proportionnel entre CB & C*i*. Or CB eſt une quantité finie, & NC un infiniment-petit du premier ordre: donc (Elem. 359) C*i* eſt un infiniment-petit du ſecond ordre. Donc un corps qui décrit une courbe, ne perd de ſa vîteſſe à chaque détour, qu'une quantité infiniment-petite du ſecond ordre.

415. COROLL. Il ſuit de-là que *le corps* B *doit décrire une infinité de fois la courbe entiere, pour perdre un degré fini de vîteſſe*: car la ſomme de tous les infiniment-petits du ſecond ordre, ne faiſant qu'un infiniment-petit du premier, le corps après avoir décrit une fois la courbe entiere, n'a perdu qu'une infinité de degrés de vîteſſe infiniment-petits du ſecond ordre, & par conſéquent qu'un infiniment petit du premier ordre.

416. THEOREME IV. *Dans un mouvement curviligne quel-*

Digitized by Google

conque, les écarts du mobile par rapport à une tangente, ſont dans les premiers inſtants très-courts comptés depuis le paſſage par le point de contact, à très-peu près comme les quarrés de ces inſtants.

DEM. I°. Soit AKH (fig. 65) un demi-cercle dont le diametre eſt AH, ſoit la tangente AE, & deux points I, F infiniment proches du point A. En abaiſſant de ces points ſur AE les perpendiculaires ID, FE, & ſur AH les perpendiculaires IB, FC, on voit que ID ou AB, & que FE ou AC expriment les écarts des points I, F par rapport à la tangente AE. Or (Elem. 565) ∴ AB : IB : BH : & ∴ AC : FC : CH, ou à cauſe des quantités infiniment-petites, AB, AC qui ſont AH = BH = CH, on a, en faiſant AH = 1, ∴ AB : IB : 1 & ∴ AC : FC : 1. Donc AB = IB^2, & AC = FC^2 (Elem. 316). Donc AB : AC :: IB^2 : FC^2; ou ID : EF :: AD^2 : AE^2. Si donc on ſuppoſe que AD, AE ſont comme les temps comptés depuis le paſſage du mobile par le point de contact A, il eſt clair que les écarts ID, FE ſont comme les quarrés de ces temps.

417. II°. Si le mobile ne décrit pas un cercle, mais une courbe quelconque AFG, il eſt clair que par les trois points infiniment proches A, I, F, on peut faire paſſer une circonférence de cercle AKH, (Elem. 477) & qu'alors l'arc AF de la courbe ſera confondu dans cette circonférence, ce qui fera que la démonſtration précédente s'y appliquera facilement.

418. COROLL. *Toute force qui altere les mouvements rectilignes, peut être conſidérée pendant un très-court intervalle de temps, comme une force accélératrice conſtante.* Car le mobile ne quitte la ligne droite ſelon laquelle il vient de faire un pas, que parce qu'il eſt détourné par une force : & comme cette force lui fait faire des écarts qui ſont comme les quarrés des temps, il eſt clair qu'elle agit de la même maniere qu'une force accélératrice conſtante (98).

Remarques ſur le calcul des Mouvements variés dans les lignes courbes.

419. POur faire le calcul des mouvements variés dans les courbes, les Géometres expriment les rapports des temps par des abſciſſes d'une courbe, & les rapports des

Digitized by Google

vîteſſes correſpondantes ou ceux des eſpaces parcourus pendant ces temps, par les ordonnées d'une courbe, parce qu'en y appliquant la théorie des courbes, on calcule facilement les propriétés du mouvement dont il s'agit.

Par exemple, les rapports des temps écoulés depuis le commencement du mouvement d'un corps juſqu'à tels inſtants qu'on voudra pris dans la durée finie de ſon mouvement, peuvent être repréſentés par les abſciſſes AD, AE, AF, (fig. 67) & les rapports des eſpaces parcourus depuis le commencement du mouvement juſqu'à la fin de chacun de ces inſtants, par les ordonnées correſpondantes DB, EC, FG. Or dans ce cas, 1°, la ligne qui paſſera par les points A, B, C, G ne ſera évidemment une droite que lorſque le rapport des abſciſſes aux ordonnées ſera conſtant: c'eſt-à-dire, que lorſque le mouvement ſera uniforme.

420. 2°. La courbe ABCG ſera concave par rapport à la ligne des abſciſſes AF, ſi la vîteſſe du mouvement eſt retardée; elle ſera convexe, ſi la vîteſſe eſt accélérée.

421. 3°. *La vîteſſe d'un corps mu en ligne courbe n'étant preſque jamais uniforme, on ne peut l'exprimer par des termes algébriques, que pour des inſtants infiniment-petits.* Par exemple, ayant mené par E l'ordonnée EC, par C la tangente CT, puis l'ordonnée *e i* infiniment proche de EC & terminée à la tangente en *c*, enfin par C la droite C *h* parallele à AE, il eſt clair que ſi la vîteſſe du mobile avoit toujours été égale à celle qu'il a lorſqu'il parcourt l'eſpace exprimé par EC, tous les eſpaces parcourus précédemment euſſent été proportionnels aux temps : ainſi AE eût toujours été comme EC : & puiſque les eſpaces parcourus ſont repréſentés par des ordonnées, qui ſont des droites qui font toujours le même angle avec le diametre, dont les abſciſſes marquent les temps correſpondants; ces ordonnées, au lieu d'être terminées à une courbe ABC, l'euſſent été à la droite TC (407). Donc puiſqu'on peut ſuppoſer (405) que pendant le temps infiniment-petit E*e*, qui ſuit le temps AE, la vîteſſe du mobile reſte uniforme, telle qu'elle étoit à la fin de ce temps AE; il eſt évident que *ec* doit repréſenter

Digitized by Google

l'eſpace correſpondant au temps A*e*, que *hc* doit repréſenter l'eſpace parcouru uniformément pendant l'inſtant E*e* ou C*h*, qu'enfin la vîteſſe du mobile à la fin du temps AE, ou pendant l'inſtant infiniment-petit ſuivant, eſt $\frac{hc}{Ch}$ (44).

422. Si on ſuppoſe que la courbe ABCG ſoit telle, qu'ayant pris ſur ſon axe AF un point quelconque D pour être l'origine des abſciſſes, un temps *t* ſoit exprimé par l'abſciſſe DE, & la vîteſſe *u* à la fin du temps *t* par l'ordonnée correſpondante EC, alors l'aire DBCED exprimera l'eſpace parcouru pendant le temps *t*. Car ſi E*e* exprime une partie infiniment-petite de *t*, & *ei* la vîteſſe correſpondante, il eſt clair (49) que l'eſpace parcouru dans cet intervalle infiniment-petit ſera exprimé par E*e* × *ei*, c'eſt-à-dire, par l'eſpace EC*i*E qui eſt un des Eléments de l'aire ou de la quadrature de la courbe; donc l'eſpace parcouru dans le temps entier *t*, eſt comme l'aire totale DBCED.

423. Par une même méthode, on voit que l'aire DBCED pourroit exprimer les temps, ſi les abſciſſes DE étoient directement comme les eſpaces parcourus, & EC réciproquement comme les vîteſſes; ce qui eſt clair par la formule $t = \frac{e}{u} = e \times \frac{1}{u}$. Enfin la même aire pourroit exprimer les vîteſſes, ſi les eſpaces étoient repréſentés par DE, & la raiſon inverſe des temps par EC, puiſque $u = \frac{e}{t} = e \times \frac{1}{t}$. Mais ces deux manieres de ſe ſervir de l'aire DBCED ne ſont ni ſi commodes, ni ſi naturelles que la premiere, qui eſt par conſéquent la plus en uſage.

424. Il ſuit de-là que *des trois rapports, ſavoir, des temps, des vîteſſes, des eſpaces, la loi de deux étant donnée, celle du troiſieme ſe trouve par l'analyſe ou par la théorie des courbes.* On y employe principalement le calcul différentiel & intégral, puiſque tout ſe réduit à déterminer la nature, les ſymptomes & la quadrature des courbes qui repréſentent les effets de ces loix.

Digitized by Google

ARTICLE II.

Du mouvement de Projection, ou du mouvement produit par une force primitivement imprimée, & par la pesanteur.

425. NOus avons déja démontré (408) que si un corps est animé de deux forces, l'une constante & l'autre accélératrice constante, il doit décrire une parabole. C'est le cas où se trouve un corps pesant que l'on jette obliquement, ou parallélement à l'horizon. L'impulsion qu'on lui donne en le jettant, est une force constante, & sa pesanteur est une force accélératrice constante. Nous supposons ici que rien ne s'oppose à l'effet de ces deux forces combinées; nous verrons dans la suite ce qui empêche que les corps jettés ne décrivent réellement des paraboles.

426. Soit donc CA (fig. 66, 68, 70) la direction de la force de projection ou d'impulsion, CI celle de la pesanteur, CLM la parabole décrite, le point C s'appelle *le point de projection*, & si on suppose que le point L (fig. 70) soit le but que l'on se soit proposé d'atteindre, la droite CL s'appelle *la portée du jet*; l'angle ACN formé par la direction CA & par la droite CN parallele à l'horizon ou perpendiculaire à la direction CI, s'appelle *l'angle de projection*. Si CA s'éleve au-dessus de l'horizon, ou si l'angle ACI est obtus, le corps jetté va d'abord en montant jusqu'à un point S qui est le sommet de la parabole, puis il descend par la branche SLN; & alors la droite horizontale CN comprise depuis le point de projection C, jusqu'à la rencontre de la parabole, s'appelle *l'amplitude du jet*. Si CA est parallele à l'horizon (fig. 68) ou si l'angle ACI est droit, le corps part du sommet C de la parabole, & va toujours descendant. Enfin si CA est inclinée vers l'horizon, ou si l'angle ACI est aigu, (fig. 66) le corps descendra toujours & ne décrira qu'une branche de parabole sans sommet. Mais dans tous ces cas CI est un diametre de la parabole.

Digitized by Google

427. *Il eſt évident* 1°, *que la direction de la force uniforme, ou la ligne ſuivant laquelle on jette un corps, eſt une tangente à la parabole au point de projection.* Car dans l'inſtant que le corps part, il ne ſuit ni la direction CA, ni la direction CI, & il n'y a que le point C commun à ces deux directions qui ſoit un point de la parabole : mais la ligne CA eſt par la conſtruction parallele aux ordonnées HK, GL, &c. donc (Elem. 773) elle eſt tangente à la parabole.

428. 2°. *Qu'on a le parametre* P *du diametre, en diviſant le quarré d'une ordonnée quelconque par ſon abſciſſe* (Elem. 819). Ainſi on aura $P = \frac{CE^2}{EL}$, & réciproquement que *ſi un corps eſt poſé ſuivant* CE, *& ſi le parametre de la parabole qu'il doit décrire eſt par rapport au point* C, *égal à* $\frac{CE^2}{EL}$, *la parabole paſſera par le point* L.

429. THEOREME I. *De quelque maniere qu'un corps décrive une parabole, la force qui le pouſſe uniformément peut être exprimée par une ligne* CB *verticale, égale à la hauteur où il ſeroit monté, ſi cette même force l'avoit pouſſé perpendiculairement en haut.*

DEM. Il n'y a pas de force finie qu'un corps ne puiſſe acquérir en tombant librement, ſi on conçoit que ce corps ayant ainſi acquis la force qu'on voudra, vienne à rencontrer ſubitement un obſtacle qui le détourne de ſon chemin vertical, & qui lui faſſe prendre une direction inclinée à l'horizon, ce corps ſe trouvera alors animé de deux forces, l'une ſera celle qu'il aura acquiſe en tombant, & qui tend à le faire aller uniformément dans cette nouvelle direction, l'autre ſera ſa peſanteur qui le porte vers le centre de la terre avec une vîteſſe uniformément accélérée; il prendra donc une route moyenne & décrira une parabole (408). Donc de quelque maniere, &c.

430. THEOREME II. *La verticale* CB (fig. 70) *qui exprime la force du jet, eſt le quart du parametre* P *du diametre* CI *commun à toutes les paraboles poſſibles que le corps peut décrire en vertu de cette force.*

Digitized by Google

Puiſque CB exprime l'eſpace parcouru en vertu d'une force accélératrice conſtante, CA = 2CB exprimera (96) l'eſpace parcouru uniformément en même temps avec la vîteſſe du corps acquiſe en C par ſa chûte depuis le point B. Si donc ſur le diametre CI on prend CH = CB, & ſi du point H on mene l'ordonnée MH, on aura (Elem. 862) $HM^2 = CH \times P$. Or HM = CA = 2CB, donc $HM^2 = 4CB^2$. Donc $4CB^2 = CH \times P$, ou $4CB^2 = CB \times P$, & en diviſant par CB, $4CB = P$. Donc $CB = \frac{1}{4}P$.

431. COROLL. I. *La verticale* CB *eſt la diſtance du point* C *à la directrice de toutes les paraboles poſſibles parcourues avec la force du jet repréſentée par* CB ; ou ce qui eſt la même choſe, *ſi du point* B *on éleve à* CB *une perpendiculaire* BT, *elle ſera la directrice de toutes ces paraboles.*

432. COROLL. II. Le point C étant commun à toutes ces paraboles, & ſa diſtance CB à la directrice commune devant être (Elem. 781) égale à ſa diſtance au foyer de chacune, il ſuit que *ſi du point* C (fig. 69) *comme centre, en prenant* CB *pour rayon, on décrit un cercle* F f Φ φ, *tous les points de ſa circonférence ſeront les foyers de toutes les paraboles poſſibles parcourues en vertu de la force du jet repréſenté par* CB.

433. THEOR. III. *La direction du jet faiſant un angle avec celle de la peſanteur, le foyer de la parabole ſera d'autant plus éloigné de ſon ſommet, que la force du jet ſera plus grande par rapport à celle de la peſanteur, & que l'angle formé par les directions de ces deux forces approchera plus d'être droit.*

Car puiſque BT (fig. 69) eſt la directrice commune à toutes les paraboles qu'il eſt poſſible de faire décrire à un corps jetté en vertu de la force abſolue du jet exprimée par CB, & puiſque les foyers de toutes ce paraboles ſont dans le cercle BF*f*, il ſuit évidemment que dans toutes ces paraboles, plus la direction du jet approche de CB ou CI, plus le point du cercle BF*f* où eſt le foyer de la parabole décrite eſt proche du point B. Donc alors plus ce foyer eſt proche de la directrice commune, & par conſéquent plus il eſt près du ſommet de la parabole. On voit de même que la parabole dont le foyer eſt le plus éloigné de ſa directrice

Digitized by Google

rectrice eſt celle dont la direction du jet eſt horizontale, puiſque ſon foyer eſt en k, de ſorte que la diſtance du foyer à la directrice eſt $2CB$, & celle du foyer au ſommet eſt CB. Donc à égales forces de jets, les foyers s'écartent d'autant plus des ſommets des paraboles, que la direction du jet approche plus d'être horizontale, & parce que le rayon du cercle BFf eſt d'autant plus grand que la force abſolue du jet eſt plus grande, il ſuit qu'en général le foyer eſt d'autant plus éloigné du ſommet de la parabole, que la direction du jet approche plus d'être horizontale, & que la force du jet eſt plus grande.

434. PROBLEME I. *Etant données la force du jet, & la poſition du but, déterminer les directions du jet*, c'eſt-à-dire, *les angles de projection.*

Soit L (fig. 71 & 72) le but dans la ligne donnée CL: du point de projection tirez CD parallele à l'horizon, & élevez-lui la perpendiculaire CP que vous ferez égale au parametre qui eſt donné par la force du jet (430): par ſon milieu F élevez la perpendiculaire GN, & par C ſur CL la perpendiculaire CG. Du point de rencontre G décrivez avec le rayon GC un arc de cercle CNP: enfin par le but L, menez LA parallele à CP, & par les deux points A, a, où elle coupe l'arc CNP, menez CA, Ca, les angles ACD, aCD ſeront les angles demandés.

DEM. Ayant tiré PA, Pa, les triangles PAC, CAL ſont ſemblables; car à cauſe des paralleles PC, AL l'angle PCA=CAL, & parce que CL eſt perpendiculaire au rayon CG, & par conſéquent tangente à l'arc CNP, l'angle ACL eſt meſuré par la moitié de l'arc CNA (Elem. 465) auſſi-bien que l'angle APC (Elem. 466) on aura donc PC : CA :: CA : AL. Donc PC = $\frac{CA^2}{AL}$. Donc (428) PC étant le parametre du diametre qui paſſe par C, le jet fait ſuivant CA fera paſſer la parabole par le point donné L. On démontrera de même que le jet ſuivant Ca fera paſſer une parabole par le même point

L, parce que les triangles ſemblables PCa, CaL donnent $PC = \frac{Ca^2}{aL}$.

435. COROLL. I. Si la parallele LA ne rencontroit pas l'arc CNP, le problême ſeroit impoſſible, le but ſeroit hors de la portée du jet, & ſi LA touchoit ſeulement cet arc, elle le toucheroit en N, & le problême n'auroit qu'une ſolution, le but ſeroit éloigné de toute la portée du jet, la direction du jet ſeroit CN, & elle diviſeroit en deux également l'angle PCL compris entre la verticale PC & la portée du jet CL. Car comme ce cas arriveroit ſi le but étoit en M, les triangles PCN, CMN ſeroient ſemblables & iſoſceles, parce que GN diviſe en deux également l'arc CNP (Elem. 454) donc l'angle PCN = NCM.

436. COROLL. II. Les deux directions CA, Ca ſont également éloignées de la direction CN qui eſt celle de la plus grande portée du jet ſur la ligne CM. Car LA & PC étant paralleles, ſont toutes deux perpendiculaires au rayon GN, les arcs AN, aN ſont égaux, (Elem. 454) & par conſéquent les angles ACN = aCN.

437. COROLL. III. Quand le but eſt de niveau avec le point de projection, (fig. 71) la plus grande portée du jet eſt CM ou CD. Elle eſt égale à la moitié du parametre CP, & l'angle de la projection NCB eſt de 45 degrés.

438. COROLL. IV. Dans le même cas la diſtance CB ou CL eſt comme le ſinus du double de chaque angle de projection ACB, aCB. Car CB étant tranſportée paralléléement à elle-même en A, eſt le ſinus de l'arc PA ou de l'arc CNA ſon ſupplément dont la moitié meſure l'angle ACB: & étant tranſportée en a, elle eſt le ſinus de l'arc Ca dont la moitié meſure l'angle aCB (Elem. 465).

439. PROBLEME II. *Etant donnés l'angle de projection & la poſition du but, déterminer à quelle hauteur montera le corps; c'eſt-à-dire, déterminer le ſommet de la parabole qu'il doit décrire.*

Soit l'angle de projection ACB, (fig. 71 & 72) tirez l'horizontale CD, & du point b pris au milieu de CF

Digitized by Google

abaiſſez ſur CA la perpendiculaire indéfinie bOf: prenez, toujours de l'autre côté de AC, $Of = Ob$, & par le point f faites paſſer la verticale HE qui coupera CA en H & CD en E. Diviſez HE en deux également en S, le point S ſera le ſommet cherché.

DEM. La ligne AC étant (427) tangente à la parabole, elle doit être perpendiculaire & diviſer en deux également la ligne bf qui va du point b de la directrice au foyer f de la parabole; (Elem 808) le point f eſt donc par conſtruction le foyer, & par conſéquent fE eſt une partie de l'axe, CE eſt une ordonnée à l'axe, HE eſt la ſoutangente, & ſon milieu S eſt le ſommet de la parabole (Elem. 827).

440. COROLL. I. *Quand la portée du jet* CB (fig. 71) *eſt horizontale, la hauteur* $SE = \frac{1}{4}AB$. Car alors l'axe eſt au milieu E entre les points C & B, & à cauſe des triangles ſemblables ACB, CHE, la ſoutangente HE eſt $\frac{1}{2}AB$, & SE eſt $\frac{1}{4}AB$.

441. COROLL. II. *Quand l'angle de projection eſt de 45 degrés, la hauteur eſt $\frac{1}{8}$ du parametre.* Car elle eſt $\frac{1}{4}$ MN qui eſt la moitié de PC.

442. COROLL. III. *Les hauteurs où montent les corps jettés ſont comme les ſinus verſes du double de l'angle de leur projection.* Car ces hauteurs étant (440) comme les quarts de BA & de Ba, ſont (Elem. 297) comme ces mêmes lignes BA, Ba: or BA, Ba étant tranſportés ſur le diametre GC ſont les ſinus verſes des arcs CA, Ca qui ſont (438) le double de la meſure de chaque angle de projection.

443. THEOREME IV. *Les temps que deux corps jettés avec la même force employent à parvenir à un même but par deux directions* CA, Ca (fig. 71 & 72) *ſont entr'eux comme les ſinus des angles de projection* ACL, aCL.

DEM. Le temps que le corps employe à parvenir de C en L par la direction CA eſt égal à celui qu'il employeroit à aller uniformément de C en A, parce que ce n'eſt qu'en vertu de ſon mouvement uniforme qu'il s'avance vers L: donc les temps employés ſuivant les projections CA, Ca ſont comme les lignes CA, Ca ou comme leurs moitiés;

or ces lignes ſont les cordes des arcs CA, C*a* qui meſurent le double des angles de projection ACL, *a*CL, donc leurs moitiés ſont les ſinus de ces mêmes angles, donc les temps ſont comme les ſinus des angles ACL, *a*CL.

Remarques ſur la Théorie précédente.

444. LA théorie des mouvements des corps jettés obliquement qui décrivent des paraboles, a été regardée pendant long-temps par ceux qui ont écrit ſur l'artillerie, comme celle des découvertes modernes, dont on pouvoit faire la plus directe & la plus heureuſe application à la pratique. C'eſt ce qui les a engagés à entrer dans de grands détails ſur cette matiere, à conſtruire des tables fort amples des angles ſous leſquels il falloit diriger les canons & les mortiers, pour atteindre à un but donné, & à inventer des inſtruments propres à marquer que les pieces d'artillerie ſont en effet dirigées ſelon ces angles. Mais ceux qui ont approfondi la théorie de la réſiſtance que les fluides oppoſent aux mouvements des corps qui les traverſent, ont reconnu que la réſiſtance de l'air à l'égard des boulets & des bombes étoit ſi grande, qu'il n'étoit pas poſſible de la négliger dans la pratique de l'artillerie, comme on avoit toujours fait, ſous prétexte que les boulets & les bombes avoient un très-petit volume, en comparaiſon de leur ſurface: que cette réſiſtance de l'air étoit cauſe que la courbe décrite réellement par un corps quoique fort peſant & d'un petit volume, s'éloignoit d'autant plus d'être une parabole, que la force du jet, par exemple, que la vîteſſe communiquée à un boulet par l'exploſion de la poudre, étoit plus grande. M. Robins a fait voir, que la réſiſtance de l'air étoit en effet ſi grande, principalement à la bouche des pieces, qu'un boulet de 24 livres chaſſé par 16 livres de poudre, éprouvoit en ſortant du canon une réſiſtance qui ſurpaſſe plus de vingt fois la peſanteur du boulet. Il a éprouvé qu'il arrive ſouvent que la courbe décrite par le boulet n'eſt pas toute dans un même plan vertical.

445. On ne peut donc fonder ſur la Géométrie ſeule des

Digitized by Google

regles ſûres de pratique pour l'artillerie, & il paroît qu'il n'y a pas d'autre parti à prendre à cet égard, que de juger par l'effet & par la portée des premiers coups que l'on tire, de la maniere dont il faut ajuſter les pieces pour approcher le plus qu'il eſt poſſible, du but qu'on ſe propoſe d'atteindre.

446. Mais quoique la théorie des mouvements de projection telle qu'on la donne ici, ne puiſſe être d'un grand uſage à l'égard de l'artillerie, elle ne laiſſe pas d'être fort utile dans les différentes parties des ſciences Phyſico-mathématiques. C'eſt elle d'ailleurs qui a conduit les Géometres du ſiécle paſſé à la théorie phyſique de l'Aſtronomie, & cette théorie eſt devenue une des plus belles & des plus utiles découvertes dont les modernes puiſſent ſe glorifier. Voici à peu-près comme l'idée en eſt venue, ou a pu venir.

447. Nous avons trouvé qu'un corps jetté près de la ſurface de la terre, décrit une parabole, parce qu'il ſe trouve animé à la fois de deux forces de différente nature, ſavoir de la force du jet, qui eſt conſtante & uniforme, & de la force de la peſanteur, qui eſt une force accélératrice, que nous avons ſuppoſé s'exercer toujours dans des droites paralleles entr'elles, & perpendiculaires à l'horizon, ce qui fait qu'elles ne peuvent être cenſées concourir qu'à une diſtance infinie du point de projection. Or cette ſuppoſition n'eſt pas exacte, parce que la direction de la peſanteur eſt toujours dans des droites qui tendent à concourir au centre de la terre, d'où il ſuit que la vraie trajectoire d'un corps jetté près de la ſurface de la terre dans un eſpace non réſiſtant, n'eſt pas, rigoureuſement parlant, une parabole, mais que c'eſt une autre courbe concave vers le centre de la terre (409). Or la parabole & l'ellipſe ſont deux courbes du même genre & qui ne different entr'elles que parce que l'ellipſe a deux foyers à une diſtance finie l'un de l'autre, & que la parabole en a deux infiniment éloignés (Elem. 806), de ſorte que la parabole devient ellipſe, lorſque la diſtance de ſes foyers ne peut plus être cenſée infinie. On peut donc regarder la trajectoire des corps jettés, comme une parabole ou comme une

Digitized by Google

ellipſe, ſelon que l'on ſuppoſera la diſtance de la ſurface de la terre à ſon centre, comme infinie ou comme finie. Et puiſque cette diſtance eſt réellement finie, on peut regarder la vraie trajectoire des corps jettés, comme un arc d'ellipſe, dont un des foyers eſt celui qui ſe trouve dans le cercle BF*f* (fig. 69), & l'autre eſt au centre de la terre.

448. Cela poſé, plus une force de projection horizontale ſera grande par rapport à celle de la peſanteur, (laquelle ſelon ce que nous avons dit (109), & que nous démontrerons dans la ſuite, ne peut faire décrire aux corps placés à la ſurface de la terre, qu'un eſpace de 15 pieds 1 pouce pendant la premiere ſeconde de temps de leur chûte libre), plus la trajectoire s'écartera de la figure parabolique, en devenant ellipſe de moins en moins allongée, ou (433) plus les deux foyers ſe rapprocheront. Or on peut concevoir la force de projection horizontale ſi grande, que ces deux foyers concourent enfin au centre de la terre, auquel cas le corps jetté ne retomberoit plus ſur ſa ſurface, mais il décriroit perpétuellement un cercle autour du centre de la terre. En effet, il eſt aiſé de calculer qu'il ſuffiroit pour cela que ce corps pût, par ſa ſeule force d'impulſion, parcourir environ 4048 toiſes à chaque ſeconde de temps, (c'eſt la diſtance à laquelle le vrai niveau s'abaiſſe de 15 pieds 1 pouce au-deſſous du niveau apparent). Car alors à chaque inſtant ſa peſanteur le rapprocheroit de la terre préciſément autant que ſa force d'impulſion horizontale l'en écarteroit.

Ce ſeroit la même choſe, ſi l'on ſuppoſoit que le point de projection horizontale fût fort élevé au-deſſus de la ſurface de la terre, pourvu que l'effet de la force de projection fût de même exactement contrebalancé par celui de la peſanteur.

449. Mais ſi la force de projection horizontale portoit le foyer que nous avons trouvé dans le cercle BF*f*, au-delà du centre de la terre, alors on voit que le corps décriroit perpétuellement une ellipſe autour de la terre, dont le centre ſeroit le lieu d'un des foyers.

Digitized by Google

450. En raisonnant ainsi par analogie, il paroît qu'il se pourroit faire que la lune ne tournât autour de la terre qu'en vertu d'une force de projection, & de sa pesanteur à l'égard de la terre; que la terre elle-même, & que les autres planetes ne tournassent autour du soleil, qu'en vertu d'une force de projection particuliere à chacune, & d'une pesanteur à l'égard du soleil. C'est-là en effet le fondement de toute la théorie physique de l'Astronomie, & c'est par le moyen de cette théorie qu'on a fait des progrès si étonnants dans cette science.

ARTICLE III.

Des Mouvements de Rotation & d'Oscillation.

451. LORSQU'UNE force est employée contre une masse quelconque, soit pour la mettre en mouvement, soit pour changer celui qu'elle a déja, la force a ordinairement deux obstacles à vaincre, & qu'il faut bien distinguer, savoir, l'inertie des particules qui composent cette masse, & leur poids. Il est vrai que l'inertie & le poids des corps sont proportionnels à la masse de ces corps, ou comme la somme des molécules égales, dont la masse est composée; mais l'inertie est une qualité invariable, inhérente à la masse, ou qui n'en peut jamais être séparée; au lieu que le poids n'est qu'une qualité accidentelle, dont l'effet peut être détruit en plusieurs manieres dans les mouvements des corps, par exemple, en les supposant placés sur des plans horizontaux parfaitement polis: d'ailleurs les poids des corps sont variables, selon toutes les expériences, ils décroissent à mesure que les corps s'éloignent du point vers lequel la pesanteur les porte.

452. Si la force employée contre un corps, s'exerce immédiatement sur le centre de gravité de ce corps, ou si la direction de cette force passant par le centre de gravité, s'exerce sur une des faces (je suppose le corps parfaitement

Digitized by Google

dur,) dont le plan soit perpendiculaire à la direction de la force, en sorte que tout son effort se communique au centre de gravité du corps, alors cet effort doit se distribuer également dans toutes les molécules qui composent la masse du corps, soit qu'on suppose que ces molécules ont en même temps de l'inertie & du poids, soit qu'on ne leur suppose que de l'inertie. Car comme pour trouver le centre de gravité d'une quantité quelconque, on a imaginé que cette quantité étoit partagée en deux systêmes de molécules égales, que chaque centre de gravité de chacun de ces deux systêmes étoit à chaque extrêmité d'un levier, dont le point d'appui étoit le centre commun de gravité de toute la quantité, soutenant en équilibre ces deux systêmes: il est évident qu'une force employée directement contre ce point d'appui, ne change rien à la position respective des molécules, dont la quantité est composée: qu'ainsi l'équilibre des deux systêmes autour du centre de gravité commun n'en doit pas être rompu, & qu'il n'en doit résulter qu'un mouvement commun à tout le levier, dont les extrêmités ne doivent pas prendre plus de mouvement l'une que l'autre, & doivent par conséquent être transportées parallélement à la direction que suit le point d'appui.

453. Mais si la force employée contre un corps n'agit pas dans une direction qui passe par son centre de gravité; ou si tendant réellement à ce centre, la force est obligée de s'exercer sur une face du corps posée obliquement à cette direction, ce qui décompose l'effort de cette puissance en deux autres, dont il n'y en a qu'un qui soit dirigé au centre de gravité; alors si par le centre de gravité C (fig. 73.) de la masse AEBD, on abaisse sur AB direction de la force F une perpendiculaire CP, & si par FB on fait passer un plan sur lequel CP soit aussi perpendiculaire, ce plan divisera la masse AEBD en deux portions ADB, AEB, inégales tant en poids qu'en inertie: chacune de ces portions aura un centre de gravité particulier. Celle où se trouve le centre de gravité C de la masse totale, a son centre de gravité en R plus loin de FB que

Digitized by Google

n'eſt le point C; la portion AEB a ſon centre de gravité en *p*. Si donc on joint *p*R, on pourra prendre cette droite pour un levier chargé à ſes extrêmités de deux maſſes AEB, ADB, ſoit qu'on les regarde comme n'ayant que de l'inertie, ſoit qu'on leur ſuppoſe du poids & de l'inertie à la fois. La force employée contre la maſſe totale étant (204) la même dans tous les points de ſa direction, elle ſera comme une puiſſance appliquée en P pour faire avancer le levier *p*R dans la direction FB; & il eſt évident que cette puiſſance ne peut communiquer aux deux portions ADB, AEB une même quantité de mouvement, ni par conſéquent faire avancer également les points *p*, R, dans une direction parallele à FB, parce qu'il faudroit pour cela que la puiſſance P pût faire équilibre avec les puiſſances *p*, R; & qu'ainſi les bras de levier P*p*, PR fuſſent en raiſon inverſe des puiſſances *p*, R; ou que P*p* fût d'autant plus long que PR, que AEB a moins de maſſe que ADB: ce qui ne peut être dans l'hypotheſe préſente. Il ſuit de-là que la portion AEB prendra plus de mouvement que la portion ADB, en raiſon de leurs moments par rapport au point P: c'eſt-à-dire, à proportion que la maſſe AEB×*p*P ſera plus petite que la maſſe ADB×PR.

454. Cela poſé, ſi dans les maſſes ainſi choquées obliquement à leur centre de gravité, on n'a égard qu'à leur inertie, en faiſant abſtraction de leur poids, ou en ſuppoſant leur poids détruit par quelque cauſe que ce ſoit, l'effet de ce choc oblique ſera de donner au corps choqué un mouvement de *rotation*, joint à un mouvement de *tranſlation* uniforme, ſi la maſſe eſt entiérement libre; ou un mouvement de rotation ou de *converſion* autour d'un point fixe, s'il s'en trouve quelqu'un parmi ceux de cette maſſe. Mais s'il faut avoir égard en même temps au poids des maſſes choquées, alors l'effet du choc oblique ſera de procurer à une maſſe entiérement libre, un mouvement de rotation joint à un mouvement de tranſlation uniformément accélérée dans une parabole, comme on l'a expliqué dans l'article précédent; & ſi la maſſe a un point fixe, le choc,

Digitized by Google

s'il eſt conſidérable relativement aux circonſtances, pourra procurer à cette maſſe un mouvement de rotation, qui ſera accélérée dans tout le demi-cercle où cette maſſe ira en deſcendant, & retardée dans tout celui où il ira en montant; puiſque la peſanteur ſe joignant alors au mouvement imprimé par le choc & conſervé par l'inertie, eſt une force accélératrice pour les corps qui tombent, & retardatrice pour ceux qui montent: mais ſi le choc eſt foible, il procurera à la maſſe par la même raiſon un balancement autour du point fixe; la vîteſſe de ce balancement qu'on appelle alors *Oſcillation*, ſera auſſi accélérée lorſque la maſſe ira en deſcendant, & retardée lorſqu'elle ira en montant.

Du mouvement de Rotation en général à l'égard des Corps ſans peſanteur, & entiérement libres.

455. NOus n'appliquerons ce que nous avons à dire ici qu'à des verges, que nous ſuppoſerons inflexibles, d'une matiere homogene, d'une figure uniforme dans toute leur longueur, & mobiles dans un milieu libre, c'eſt-à-dire, dans un lieu où rien ne ſe rencontre, qui s'oppoſe à leur mouvement. La théorie que nous expoſerons, ſuffira pour les cas les plus ordinaires, & pour montrer la méthode qu'il faut ſuivre dans ces ſortes de recherches. Cette théorie ne ſeroit rien moins qu'élémentaire, ſi on vouloit l'étendre ſur toutes les eſpeces de corps, dont la Géométrie enſeigne la nature & les propriétés.

456. Soit la verge AB (fig. 74) ſon centre de gravité C. Qu'elle ſoit frappée en P dans une direction RP perpendiculaire à ſa longueur, il eſt évident que la force du coup étant perpendiculaire à AB, ne doit pas ſe décompoſer; elle doit donc ſe diſtribuer dans toutes les molécules de la verge, en tendant à donner à chacune, un mouvement dans des directions paralleles à RP. Mais comme cette force ne peut communiquer de mouvement, qu'en ſurmontant la réſiſtance cauſée par l'inertie des molécules, & qu'à cauſe de l'inflexibilité de la verge, l'effet de cette

Digitized by Google

réſiſtance devient d'autant plus grand, que la molécule eſt plus éloignée du point de percuſſion ; de même qu'une puiſſance appliquée à l'extrêmité d'un levier, a un effet d'autant plus grand à l'égard du point d'appui, que le bras de levier eſt plus long ; il arrive que lorſque le point de percuſſion P eſt un peu éloigné du centre de gravité C, & proche d'une des extrêmités A de la verge, l'inertie des molécules qui ſont vers l'extrêmité B, les empêche de s'écarter de la poſition AB avec autant de vîteſſe qu'en ont celles qui ſont proches du point P : & qu'ainſi la droite AB prend un mouvement qui a les propriétés ſuivantes.

457. 1°, Le centre de gravité C de la verge AB s'avance continuellement & uniformément dans la droite CK perpendiculaire à AB ou parallele à PC, avec une vîteſſe proportionnée à la quantité de mouvement que la molécule placée en C a dû prendre, eu égard à la force abſolue du choc, & à la diſtance du point C au point de percuſſion P, comme on le calculera dans la ſuite. Le centre de gravité C étant au milieu entre A & B, ſa vîteſſe eſt à très-peu près moyenne proportionnelle arithmétique entre les vîteſſes A*a*, B*b* des extrêmités de la verge, pendant la durée du premier inſtant du choc : elle eſt donc (Elem. 274) à très-peu près égale à la moitié de la ſomme des vîteſſes A*a*, B*b*, ſi les points A & B ont été tranſportés du même côté par rapport à la direction primitive AB ; ſinon, elle eſt à très-peu près égale à la moitié de la différence de ces vîteſſes : (voyez fig. 75). On dit ici *à très-peu près*, parce qu'on va voir que, rigoureuſement parlant, les eſpaces A*a*, B*b* ne ſont pas rectilignes, mais des arcs d'une courbe.

458. 2°, Tandis que le centre de gravité de la verge s'avance le long de CK, en emportant la verge entiere de AB en *ab*, cette verge s'incline de plus en plus ; & ce mouvement continuel & uniforme d'inclinaiſon, faiſant paſſer la verge ſucceſſivement par toutes les inclinaiſons poſſibles, ſur le plan dans lequel les mouvements de la verge AB s'exécutent, la verge prend, après le choc, un mouvement uniforme de rotation autour de ſon centre de gravité.

Digitized by Google

Toutes les molecules compriſes entre C & A tournent donc dans un ſens, & toutes celles qui ſont entre C & B tournent dans le ſens oppoſé : & les eſpaces qu'elles parcourent en tournant, ſont en temps égaux comme les diſtances des molécules au centre de gravité.

459. A l'égard de la meſure de la rotation des extrêmités de la verge, elle eſt à très-peu près la moitié de la différence des vîteſſes abſolues des points A & B. Car ſoit la verge tranſportée de *ab* à la fin du premier inſtant du choc : par le centre de gravité K ayant mené E F parallele & égale à A B, il eſt clair que l'angle *a* K E meſure le changement d'inclinaiſon arrivé pendant la durée de cet inſtant, & que cet angle étant fort petit, l'arc qui le meſure eſt confondu avec la droite *a* E, laquelle à cauſe des triangles ſemblables *a* E K, *ab* D, eſt la moitié de *a* D. Or à cauſe des paralleles A B, *b* D la différence entre A *a* & B *b* eſt *a* D, ce qui ſe voit aiſément dans la fig. 74, & même dans la fig. 75 en conſidérant que la différence entre + A *a* & — B *b* eſt (Elem. 140) A *a* + B *b* = *a* D.

460. On voit donc que le mouvement du centre de gravité C eſt le ſeul rectiligne & ſimple, & que celui de toutes les autres molécules, eſt compoſé de la ſomme ou de la différence de deux mouvements, l'un rectiligne uniforme, dont la vîteſſe fait parcourir en temps égaux des eſpaces paralleles & égaux à ceux que décrit le centre de gravité C qui emporte toute la verge, & l'autre de rotation uniforme, dont la vîteſſe fait parcourir des eſpaces proportionnels à la diſtance de la molécule au centre de gravité. Ainſi A *a* qui exprime le mouvement du point A pendant la durée du premier inſtant, au commencement duquel la percuſſion a été faite, eſt compoſé de la ſomme de A E (= C K), qui meſure l'eſpace parcouru par le point A en vertu de ſon mouvement uniforme rectiligne, & de E *a* qui meſure la quantité dont la verge s'eſt inclinée pendant ſon tranſport de A B en *ab*. Car à cauſe de la petiteſſe de cette inclinaiſon, qui eſt déterminée par l'angle *a* K E, on peut prendre la droite E *a* pour l'arc qui me-

Digitized by Google

ſure cet angle. Et B*b* qui exprime le mouvement du point B dans le même temps, eſt égale à la différence entre FB (=CK), eſpace parcouru en vertu du mouvement rectiligne uniforme, & F*b* qui repréſente l'arc qui meſure l'inclinaiſon FK*b*. Ces eſpaces A*a*, B*b* parcourus réellement par les extrémités de la verge, réſultants d'un mouvement rectiligne & d'un circulaire en même temps, ſont donc, rigoureuſement parlant, des arcs d'une courbe (518): on l'appelle la *Cycloïde*, nous en parlerons dans la ſuite.

Si le mouvement commun à toutes les molécules étoit arrêté par quelque obſtacle invincible, la verge ne feroit plus que pirouetter.

461. Puiſque le mouvement abſolu de chaque point de la verge AB eſt ainſi compoſé de deux mouvements, il ſuit que le mouvement circulaire d'un des points de la verge comme G (fig. 75.), placé entre le centre de gravité & l'extrêmité B oppoſée au point de percuſſion P, ſe faiſant dans un ſens oppoſé à celui du mouvement rectiligne, il peut arriver que pendant la durée des premiers inſtants fort courts qui ſuivent le choc, l'arc HG décrit en vertu de ce mouvement circulaire, ſoit ſenſiblement une droite égale, & ſenſiblement confondue avec l'eſpace rectiligne GI (=CK) décrit en vertu du mouvement rectiligne. Or dans ce cas, il eſt évident que ces deux mouvements ſe détruiſent, & que le point G doit reſter ſenſiblement fixe en G pendant ces mêmes inſtants: il ne doit paroître s'en écarter ſenſiblement que lorſque GI, qui eſt le ſinus de l'angle GKH, & HG qui eſt l'arc qui le meſure, ne peuvent plus être cenſés égaux & confondus.

Par la même raiſon, on voit que les autres molécules placées entre G & B doivent par leur mouvement circulaire décrire des eſpaces plus grands, que ceux qu'ils décrivent en même temps par leur mouvement rectiligne, & qu'ainſi dans les premiers inſtants fort courts qui ſuivent le choc, en n'examinant pas les mouvements abſolus de la verge, mais en comparant ſes mouvements à la poſition primitive AB qu'elle avoit avant le choc, la verge a dû

Digitized by Google

paroître tourner sur un point fixe G, qu'on appelle *le centre spontané de rotation* ou *le centre de conversion*. Et parce que la position de ce point est indépendante de la force du choc, mais dépend seulement de la position du point de percussion, comme on le verra bientôt; & que dans un grand nombre de cas, on a besoin de comparer ensemble, non les positions absolues d'une verge mue en vertu d'un choc reçu en un autre point que son centre de gravité, mais leurs positions relatives à la fin d'un espace de temps fort court après le choc, nous examinerons en particulier les propriétés de cette sorte de mouvement autour d'un centre de conversion.

462. REMARQUE I. Si la verge AB n'étoit pas frappée perpendiculairement à sa longueur, mais obliquement, alors la force du choc se décomposeroit au point de percussion en deux efforts, l'un dans une direction perpendiculaire à AB, & dont l'effet seroit de tendre à donner à la verge les deux mouvements, le circulaire & le rectiligne, comme on vient de voir; & l'autre effort seroit dans la direction de la verge. Cet effort ne tendroit donc qu'à faire avancer uniformément la verge dans le sens de sa position primitive; il n'altéreroit pas le mouvement circulaire des molécules de la verge, mais seulement leur mouvement rectiligne, de sorte que la rotation restant la même que s'il n'y eût eu que l'effort perpendiculaire, la route du centre de gravité seroit dans la diagonale d'un parallélogramme, dont CK seroit un côté, & dont l'autre côté, dirigé sur AB, seroit égal à la longueur de la ligne qui exprimeroit l'effort dans le sens de la verge.

463. REMARQUE II. Un mouvement quelconque imprimé à la verge avant qu'elle eût reçu le choc, ne feroit que se composer avec celui que le choc feroit naître, ainsi la verge auroit toujours un mouvement de progression & un de rotation, à moins qu'un des deux mouvements nouvellement produit ne se trouvât détruit par un mouvement égal & en sens contraire, que la verge auroit eu avant le choc.

Digitized by Google

Des mouvements de rotation des Corps libres dans les premiers inſtants d'un choc, conſidérés relativement à leur poſition avant le choc.

464. THEOREME I. *Si une verge inflexible, d'une matiere homogene, d'une figure uniforme & mobile dans un milieu libre, eſt frappée en un de ſes points quelconques perpendiculairement à ſa longueur; le produit de la diſtance du point de percuſſion au centre de gravité, par la diſtance du centre de converſion au même centre de gravité, eſt dans les premiers inſtants après le coup, un douzieme du quarré de la longueur de la verge.*

DEM. Le point de percuſſion P (fig. 77 & 78) étant différent du centre de gravité C de la verge AB, dont le centre de converſion eſt en G, il eſt clair que la vîteſſe avec laquelle chaque molécule de la verge tourne autour du point G eſt comme ſa diſtance à ce point, puiſque l'inflexibilité de la verge fait que toutes ſes parties ſe meuvent en même temps, & que par conſéquent (45) leurs vîteſſes ſont comme les eſpaces qu'elles parcourent, leſquels ſont entr'eux comme les diſtances de ces parties au point G. D'où il ſuit (59) que le moment de chacune des parties de la verge à l'égard du point G, eſt comme le produit de la maſſe de ce point par ſa diſtance au point G; c'eſt-à-dire, comme le produit de la maſſe de chaque molécule par ſa diſtance au point B plus ou moins la diſtance BG du point B au centre de converſion G, ſelon que le point G eſt au-delà (fig. 77) ou en-deçà (fig. 78) du point B. Ainſi le moment du point E eſt comme $E \times (EB \pm BG)$, ou comme $E \times EB \pm E \times BG$.

Or 1°, La ſomme des produits de chaque molécule par ſa diſtance au point B eſt égale (384) au produit de la verge entiere AB par la diſtance CB de ſon centre de gravité C au point B, ou à $AB \times \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}AB^2$. Si donc par le point C on mene $CT = CB$ perpendiculairement à AB, & ſi on acheve le triangle rectangle ABS, ſa ſurface

Digitized by Google

pourra repréſenter la ſomme de tous les produits de chaque molécule par ſa diſtance au point B, puiſque (Elem. 592) cette ſurface $= AB \times \frac{1}{2} AS = AB \times CT = AB \times \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AB^2$. Ainſi ſuppoſant la maſſe de chaque molécule comme $E = 1$, EH (fig. 77) parallele à CT terminée par SB, & par conſéquent égale à EB, repréſente le produit de la molécule E par ſa diſtance au point B.

2°, La ſomme des produits de la maſſe de chaque point de la verge AB, par $\pm BG$, eſt égale au produit de la verge entiere par $\pm BG$: c'eſt-à-dire, à $AB \times \pm BG$. Si donc ſur AB on éleve perpendiculairement $BK = BG$, & ſi l'on acheve le rectangle AK, ſa ſurface repréſentera la ſomme des produits de AB par $\pm BG$. Or il eſt clair que pour repréſenter $AB \times + BG$, il faut que le rectangle AK ſoit placé à l'oppoſite du triangle SAB, comme dans la fig. 77: & pour repréſenter $AB \times - BG$ ou $- AB \times BG$, il faut que le rectangle AK ſoit placé du même côté que le triangle ASB comme dans la fig. 78. Ainſi EW repréſente le produit de la molécule E par la diſtance BG: de ſorte que le moment du point E par rapport à G eſt repréſenté par $HW = EH \pm EW$.

465. Cela poſé, le point de percuſſion P propre à déterminer le centre de rotation en G, ſera évidemment dans une droite, comme LP, parallele à CT & qui partagera la combinaiſon du triangle ASB & du rectangle AK, de ſorte que la ſomme des momens des molécules de la verge AB ſoit égale de part & d'autre du point P: la droite LP paſſera donc par un point Q qui ſera le point d'appui d'un levier qui joint les centres de gravité F, I du triangle ASB & du rectangle AK, puiſqu'en ce point Q les effets repréſentés l'un par la ſurface de ce triangle, l'autre par celle du rectangle, ſont exactement contrebalancés ou en équilibre.

Remarquez que le point Q (fig. 77) eſt au centre de gravité du trapeze SBKN, c'eſt-à-dire, dans le concours de la droite DO qui paſſe par le milieu des côtés oppoſés & paralleles BK, NS, & de la droite FI qui joint les centres de gravité du triangle & du rectangle. Dans la fig. 78. le

le point Q eſt au concours des mêmes droites DO, FI; mais il n'eſt pas au centre de gravité du Polygone SABKVS.

Maintenant ſi par le point F on fait paſſer la droite FR perpendiculaire à AB, on aura par la conſtruction $AR = \frac{1}{3}AB$, à cauſe de $XF = \frac{1}{3}XB$ (355), & des triangles rectangles ſemblables BAX, BFR. Donc $RC = AC - AR = \frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}AB = \frac{1}{6}AB$. Mais les triangles ſemblables $FQ\Upsilon$, QIZ donnent $FQ : QI :: \Upsilon Q : QZ$, puis (Elem. 557) $\Upsilon Q : QZ :: RP : PC$. Donc $RP : PC :: FQ : QI$. Or (234) $FQ : QI :: AB \times BG : \frac{1}{2}AB^2 :: BG : \frac{1}{2}AB$ (Elem. 296): donc $RP : PC :: BG : \frac{1}{2}AB$, & $PC + RP : PC :: \frac{1}{2}AB + BG : \frac{1}{2}AB$, c'eſt-à-dire, RC ou $\frac{1}{6}AB : PC :: CG : \frac{1}{2}AB$. Donc enfin $PC \times CG = \frac{1}{12}AB^2$.

466. COROLL. I. Si le centre de converſion étoit en B, alors BG étant infiniment petit, le rectangle AK ſeroit infiniment étroit, ſon centre de gravité I tomberoit en C, le point D tomberoit en B, DO ſe confondroit avec BX, & ne rencontreroit FI qu'au point F; donc le point P tomberoit ſur le point R, & à cauſe de $RC = \frac{1}{6}AB$, le point de percuſſion ſeroit éloigné du centre de gravité de la verge de $\frac{1}{6}$ de ſa longueur, ou ce qui eſt le même, il ſeroit éloigné de l'extrémité A du tiers de la longueur de la verge.

467. COROLL. II. Si la diſtance CG du centre de gravité au centre de converſion étoit $\frac{1}{6}AB$, alors $PC \times \frac{1}{6}AB = \frac{1}{12}AB^2$: donc $PC = \frac{1}{2}AB$, ou ſi on avoit $BG = \frac{1}{3}AB$, on auroit $RC : CP :: \frac{1}{6}AB : \frac{1}{2}AB$: Or $RC = \frac{1}{6}AB$, donc $CP = \frac{1}{2}AB$: c'eſt-à-dire, qu'alors le point de percuſſion ſeroit à l'extrémité A de la verge AB.

468. COROLL. III. *Les différentes diſtances des points de percuſſion au centre de gravité, ſont toujours en raiſon inverſe des diſtances des centres de converſion correſpondants au centre de gravité.* Car puiſque $\frac{1}{12}AB^2$ eſt une quantité conſtante, on peut faire $PC \times CG = 1$: donc $PC = \frac{1}{CG}$, ou $CG = \frac{1}{PC}$.

469. COROLL. IV. *La poſition du centre de converſion ne dépend que de celle du point de percuſſion, & non de la force de*

percuſſion, laquelle n'influe que ſur la vîteſſe des mouvements.

470. COROLL. V. *Par une ſeule percuſſion, on ne peut amener le centre de converſion au centre de gravité*, puiſqu'il n'en peut approcher plus près que $\frac{1}{2}$ de la longueur de la verge.

471. THEOREME II. *L'angle de converſion d'une verge frappée d'un ſeul coup comme dans le théorême précédent, eſt dans les inſtants très-courts qui ſuivent le choc, comme le produit de la force imprimée par la diſtance* PC *du point de percuſſion au centre de gravité de la verge :* ou ce qui revient au même, *le moment de la force imprimée rapporté au centre de gravité, eſt l'expreſſion de l'angle de converſion.*

DEM. Le centre de converſion G (fig. 74 & 75) eſt fixe pendant les premiers inſtants qui ſuivent le choc : le chemin CK du centre de gravité pendant ces inſtants étant perpendiculaire à AB, il peut être pris pour l'arc qui meſure l'angle de converſion AG*a* : Donc l'angle de converſion AG*a* eſt comme CK. Or 1°, CK eſt d'autant plus grand que la force *f* du choc eſt plus grande, ou $CK = f$. 2°. CK eſt un arc de cercle d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que le centre G en eſt plus proche, ou $CK = \frac{1}{CG}$: Mais $CG = \frac{1}{PC}$ (468). Donc $CK = PC$. Donc en général $CK = f \times PC$: Donc l'angle AG*a* eſt comme $f \times PC$.

472. COROLL. *A forces égales, plus on frappe la verge près de ſon extrémité, plus l'angle de converſion eſt grand.*

473. THEOREME III. *A quelque diſtance du centre de gravité qu'une verge reçoive en même temps deux coups égaux en ſens contraires, ſon centre de converſion eſt au centre de gravité.*

DEM. Soit d'abord un coup appliqué en P (fig. 76) qui tende à faire tourner la verge AB ſur ſon centre de converſion G, & à lui donner à la fin de l'inſtant du choc la ſituation *a b*, enſorte que le centre de gravité ſoit tranſporté de C en K. Alors (471) l'angle de rotation AG*a* étant $= f \times PC$, & un arc quelconque étant toujours d'autant plus étendu qu'il meſure un plus grand angle, & qu'il a un

Digitized by Google

plus grand rayon, c'eſt-à-dire, (16) un arc étant comme l'angle multiplié par le rayon, on a $f \times PC \times CG$ pour l'expreſſion de l'arc CK; & à cauſe de $PC \times CG = \frac{1}{12} AB^2$. (465), on a $CK = f \times \frac{1}{12} AB^2$. Mais ſi une autre force égale à f appliquée au point Q en ſens oppoſé à celui du point P, tend à faire tourner la verge AB ſur le point g, & à lui donner dans le premier inſtant après le choc, la poſition $\alpha\beta$, on voit de même que l'expreſſion de l'angle $Ag\alpha$ étant $f \times QC$, celle de l'arc CL ſera $f \times QC \times Cg$, ou à cauſe de $QC \times Cg = \frac{1}{12} AB^2$, $CL = f \times \frac{1}{12} AB^2$. Donc puiſque les forces f ſont égales, $CK = CL$; donc en vertu des deux chocs ſimultanés, égaux & oppoſés, le centre de gravité reſte en repos, en quelque point que la verge ſoit frappée; donc elle ne peut tourner que ſur ſon centre de gravité.

474. SCHOLIE. Si les forces des deux chocs ne ſont pas égales, ſi l'une eſt exprimée par f, l'autre par ϕ, le centre de gravité ne ſera plus le centre de converſion, mais le centre de converſion ſe portera du côté où l'une des deux formules $f \times \frac{1}{12} AB^2$, $\phi \times \frac{1}{12} AB^2$ exprimera une plus grande quantité; & alors le mouvement de ce centre eſt comme la différence de ces deux quantités : on voit même que ſi les deux coups avoient été donnés dans le même ſens, le mouvement du centre de gravité auroit été comme la ſomme de ces deux quantités : de ſorte qu'en général, *le centre de gravité d'une verge frappée de deux coups à la fois, prend un mouvement qui lui fait décrire un eſpace, qui eſt toujours comme la ſomme, ou comme la différence des forces des coups, ſelon qu'ils ont été donnés dans le même ſens, ou en ſens oppoſés;* & comme chaque angle de converſion eſt (471) exprimé par le moment de la force du coup rapporté au centre de gravité de la verge, *l'angle de converſion eſt comme la ſomme, ou comme la différence des moments des coups, par rapport au centre de gravité de la verge.*

475. PROBLEME. *Etant données les forces* f, ϕ *de deux coups quelconques appliqués en même temps en deux points différents donnés ſur la verge* AB, *trouver le centre de converſion* H,

(fig. 79 & 80) *dans les premiers instants après le choc.*

SOLUTION. Supposez que par l'effet de la force f, si elle eût été seule, la verge AB eût été transportée à la fin de l'instant du choc en $a\,b$, & que par l'effet de la force φ seule, elle eût été transportée de AB en $\alpha\,\beta$, ayant déterminé par ce qui a été dit ci-dessus, les centres de conversion G, D, la quantité de ces angles, & les arcs CK, CL décrits par le centre de gravité, puis ayant pris $CI = CK \pm CL$, selon que les coups auront été portés du même sens ou en sens opposés, vous aurez le point I pour le lieu du centre de gravité de la verge à la fin de l'instant du choc. Sur les extrémités de ces droites prenez l'espace $A\,\alpha$, & portez-le de a en E, dans le même sens que α a été transporté à l'égard de A; ou bien prenez $B\,\beta$, portez-le de b en F, dans le même sens que β a été transporté à l'égard de B: puis par le point I & par un de ces points E ou F, tirez EF qui sera la position de la verge à la fin de l'instant du choc simultané des deux forces f, φ, & qui donnera en H le centre de rotation de la verge AB.

Pour calculer la position de ce point H, par le point I, menez IM parallele à $\alpha\,\beta$ jusques à la rencontre de AB, & à cause des triangles rectangles semblables CMI, CLD, on a CL : CI :: CD : CM, ou (474) $\varphi : f \mp \varphi$ :: CD : $CM = \frac{(f \mp \varphi) \times CD}{\varphi}$. Or dans les triangles rectangles CMI, CHI prenant CI pour rayon, CM & CH sont les tangentes des angles CIM, CLD, CIH compléments des angles CDL, CHI. Donc CM : CH :: *Cot.* CDL : *Cot.* CHI :: *tang.* CHI : *tang.* CDL (Elem. 736). Et à cause de la petitesse de ces angles qui fait qu'ils sont confondus avec leurs tangentes, on a CM : CH :: *angle* CHI : *angle* CDL. Or (474) l'angle CHI est comme la somme $mf + \mu\varphi$ ou comme la différence $mf - \mu\varphi$ des moments des forces f, φ rapportés au centre de gravité C, & l'angle CDL est comme le moment $\mu\varphi$ de la force φ rapportée au même centre C : Donc enfin CM : CH :: $mf \pm \mu\varphi : \mu\varphi$, ou $\left(\frac{f \mp \varphi}{\varphi}\right)$

Digitized by Google

$\times CD : CH :: mf \pm \mu\varphi : \mu\varphi$, & $CH = \frac{(f \mp \varphi) \times CD \times \mu\varphi}{\varphi(mf \pm \mu\varphi)}$.

476. COROLL. Si les droites ab, $a\beta$ étant portées en ſens contraires, la différence entre $A\alpha$ & Aa, qui eſt AE, ſe trouvoit égale à CI, il eſt évident que EF ſeroit parallele à AB, & que par conſéquent il n'y auroit pas de rotation, mais que la verge iroit parallélement à elle-même, dans le ſens du choc le plus fort.

477. REMARQUE. Si la verge AB (fig. 77 & 78) étoit ſuppoſée chargée d'un poids en quelqu'un de ſes points : alors il faudroit ajouter le moment de ce poids à celui des points de la branche de la verge dans laquelle ce poids ſeroit placé, ce qui changeroit les circonſtances des regles que nous venons de trouver ; mais il ſera facile d'en faire l'analyſe par la méthode que nous avons ſuivie. Nous ne pouvons entrer là-deſſus dans des détails.

Du mouvement de rotation uniforme des corps autour d'un point fixe, en ne conſidérant que leur inertie.

478. LOrſqu'une verge inflexible & ſans peſanteur, d'une matiere homogene, & d'une figure uniforme, n'eſt mobile dans un milieu libre, que ſur un point fixe pris dans ſon axe, il eſt évident ....

1°. Qu'un mouvement quelconque imprimé à cette verge, ne peut être qu'un mouvement de rotation autour de ce point fixe : & que ſi ce mouvement eſt uniforme, les eſpaces parcourus en temps égaux par les différents points de la verge, ſont comme les diſtances de ces points au point fixe : D'où il ſuit que la force ou quantité de mouvement de chacun des points peut être exprimée par le produit de leur maſſe par leur diſtance au point fixe.

479. 2°. Que la force imprimée par un coup ne ſe diſtribue pas dans tous les points de cette verge, de même que ſi n'ayant pas de point fixe, elle étoit abſolument libre ; parce que dans le point fixe, tout le mouvement que le coup tend à communiquer, eſt éteint par la force

Digitized by Google

qui rend ce point immobile. Si cependant le point fixe étoit au centre de converſion que le coup donné à la verge lui eût procuré dans l'inſtant du coup ; la force du coup ſe diſtribueroit d'abord par toute la verge, à peu-près de de même que s'il n'y avoit pas de point fixe, mais dans les inſtants ſuivants cette diſtribution changeroit.

480. 3°. Que ſi avant le mouvement imprimé, on avoit ſuppoſé un corps d'une maſſe donnée, attaché à cette verge en quelqu'un de ſes points ; la force imprimée enſuite à la verge par un coup quelconque, ſe diſtribuant dans tous les points de la verge, pour vaincre leur inertie, le mouvement que prend le corps devient aſſujetti à celui de la verge, de ſorte que pendant tout le mouvement, ce corps reſſent toujours une action de la verge, qui tend à accélérer ou à retarder la vîteſſe de rotation de ce corps, ſuivant les circonſtances. C'eſt pourquoi la force qui produit cette action, s'appelle la force *accélératrice* ou *rétardatrice* de la verge. Réciproquement, le corps ayant par ſon inertie une tendance à ſe mouvoir plus ou moins vîte que la verge, a une force accélératrice ou rétardatrice à l'égard de la verge : Et la force accélératrice du corps, eſt égale & en ſens oppoſé à la force rétardatrice de la verge, au point où le corps y eſt fixé.

481. 4°. Que ſi on regarde la verge SA (fig. 82) comme une ſimple étendue en ligne droite, & par conſéquent ſans maſſe ni inertie, l'inertie du corps B qui y eſt fixé, eſt comme une puiſſance appliquée à un levier, dont le point d'appui eſt au point fixe S. L'effort f qu'il faut faire ſur un point quelconque A de cette verge, pour contrebalancer l'effet de l'inertie du corps B, ou ce qui eſt le même, la force f que cet effort communique au point A, eſt à cette inertie, ou à la force p de la verge au point B où le corps B eſt placé, en raiſon réciproque de la diſtance de ces points au point fixe S : c'eſt-à-dire, $f : p :: SB . SA$. Ainſi $f = \frac{p \times SB}{SA}$.

482. THEOREME I. *Dans le mouvement de rotation d'une*

Digitized by Google

verge inflexible & ſans peſanteur, chargée d'un corps quelconque, dans un de ſes points, la force accélératrice de la verge en ce point, eſt comme la force de la verge dans ce même point, diviſée par la maſſe du corps.

Car la force de la verge en ſes différents points étant différente, ſelon la diſtance de ces points au point fixe, il eſt évident que la verge doit communiquer à un corps libre qu'elle choqueroit, une vîteſſe d'autant plus grande que ſa force ſeroit plus grande dans le point du choc, & que ce corps auroit moins d'inertie ou de maſſe; & par conſéquent l'expreſſion de la force accélératrice du point choquant de la verge, eſt la force de ce point diviſée par la maſſe du corps choqué.

483. THEOREME II. *Une verge* SA (fig. 82) *inflexible, ſans peſanteur, uniforme, homogene, capable ſeulement de ſe mouvoir autour du point fixe* S, *& portant en* B *un corps* B *attaché à une diſtance quelconque* SB *du point fixe* S, *ayant reçu un coup quelconque* = p *en un point* A, *placé à une diſtance quelconque* SA *du même point fixe* S; *la force accélératrice* = f *qui produit une rotation uniforme dans le point* B, *eſt comme le moment* $p \times SA$ *du coup donné, diviſé par le produit* $SB^2 \times B$ *de la maſſe* B *du corps, par le quarré de ſa diſtance au point fixe*, c'eſt-à-dire, $f = \frac{p \times SA}{SB^2 \times B}$.

DEM. Si la force p eût été imprimée à la verge dans le point B, on eût eu (482) $\frac{p}{B}$ pour l'expreſſion de la force accélératrice qui eût produit le mouvement du corps B, & en même temps celui de la verge. Mais parce que la force p a été imprimée à la diſtance SA du point fixe, on peut regarder cette force, comme une puiſſance p appliquée en A, à un levier SA, dont le point d'appui eſt en S; & la maſſe B, comme une autre puiſſance en équilibre au point B. Faiſant donc (234) $SB : SA :: p : q = \frac{SA \times p}{SB}$, q exprimera l'effet que la force imprimée en A, a produit

sur le corps B : donc (482) $\frac{q}{B}$ ou $\frac{SA \times p}{SB \times B}$ sera l'expression de la force accélératrice qui agit sur le corps B, pour le faire tourner autour du point S. Mais la force accélératrice fait décrire des espaces d'autant plus grands, qu'elle est plus grande; & ces espaces étant circulaires, sont des arcs d'un nombre de degrés d'autant plus grand, que le rayon en est plus petit; Donc la force accélératrice que ressent le corps B, & qui le fait tourner autour du point S, est aussi en raison inverse du rayon des arcs décrits, c'est-à-dire, comme $\frac{1}{SB}$: de sorte qu'en général (16) $f = \frac{SA \times p}{SB^2 \times B}$.

484. COROLL. I. *La force accélératrice d'un corps quelconque placé à différents points d'une même verge frappée en un même point quelconque, demeurera constante, si la masse de ce corps est en raison inverse du quarré de sa distance au point fixe;* ou ce qui est le même, *si le produit de sa masse par le quarré de sa distance au point fixe, est constant.* Car à cause des quantités constantes AS & p, la formule $f = \frac{SA \times p}{SB^2 \times B}$ devient $f = \frac{1}{SB^2 \times B}$; si donc on a $B = \frac{1}{SB^2}$, ou si $SB^2 \times B = 1$, la formule se réduira à $f = 1$.

485. COROLL. II. Si donc on fait $SA^2 : SB^2 :: B : \frac{SB^2 \times B}{SA^2}$, il suit qu'en ôtant la masse B hors de la verge, & qu'en plaçant en A une masse exprimée par $\frac{SB^2 \times B}{SA^2}$, le coup p appliqué en A fait décrire en même temps le même angle de rotation, que si le corps B n'avoit pas été remplacé par la masse posée en A.

486. COROLL. III. En généralisant cette propriété, on voit qu'*une verge* SA *chargée de tant de masses* B, C, D, &c. (fig. 81) *qu'on voudra, étant frappée en* A, *de sorte que dans le premier instant du choc, l'angle de rotation soit* ASa, *la force* p *de ce coup fait le même effet sur la verge, que si ayant ôté les masses* B, C, D &c. *on avoit substitué en* A *une seule masse,*

Digitized by Google

exprimée par $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D \&c}{SA^2}$. Car puisqu'il faut un même coup en A, pour faire décrire dans le même temps, ou l'arc B*b* à la masse B, ou l'arc A*a* à une masse $= \frac{SB^2 \times B}{SA^2}$ placée en A; soit $= r$ la force de ce coup. Puisqu'il faut de même un même coup en A, pour faire décrire dans le même temps, ou l'arc C*c* à la masse C, ou l'arc A*a* à une masse $= \frac{SC^2 \times C}{SA^2}$ placée en A; soit $= s$ la force de ce coup. Puisqu'enfin il faut un même coup en A, pour faire décrire dans le même temps, ou l'arc D*d* à la masse D, ou l'arc A*a* à une masse $\frac{SD^2 \times D}{SA^2}$ placée en A, soit $= t$ la force de ce coup, &c. Il est évident que la force p appliquée en A, fait le même effet que les forces r, s, t &c. appliquées en A au même instant; donc $p = r + s + t$ &c. Donc la verge chargée en A d'une seule masse exprimée par $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D \&c}{SA^2}$, & frappée du coup p, a le même mouvement de rotation, que lorsque les masses B, C, D &c. sont placées le long de la verge SA aux points B, C, D &c.

487. REMARQUE. Si à la place de SB^2, SC^2, SD^2 &c. on met Bb^2, Cc^2, Dd^2 &c. qui sont dans le même rapport, on conclura que *si des corps sans pesanteur joints ensemble par des lignes inflexibles, tournent autour d'un point fixe, la somme des produits de leurs masses par les quarrés de leurs vîtesses, est constante.*

Du Mouvement d'Oscillation, ou de la rotation des Corps pesants autour d'un point fixe.

488. NOus n'avons supposé jusques ici que de l'inertie dans les corps frappés & contraints de tourner autour d'un point fixe : il nous reste à examiner la nature de la rotation, lorsque les corps frappés ont de la pesanteur, c'est-à-dire, qu'outre la force qu'ils ont acquise par

Digitized by Google

le choc, ils ſont continuellement animés d'une force accélératrice, qui les porte vers le centre de la terre, qui tend à convertir tous les mouvements en chûtes, enfin qui accélére les vîteſſes des corps qui deſcendent, & retarde celles des corps qui montent.

489. Le mouvement d'oſcillation tel que nous le conſidérons ici, eſt un mouvement alternatif d'allée & de retour autour d'un point fixe, ſoit que le corps qui oſcille ſoit attaché à ce point fixe par une verge inflexible, ſoit qu'il roule dans la concavité d'une courbe qui ſupporte ce corps, & qui fait par conſéquent le même effet, qu'un fil auquel le corps ſeroit ſuſpendu.

490. On appelle *iſochrones* tous les mouvements qui ſe font dans une même durée de temps préciſément : ainſi les oſcillations de deux corps ſont iſochrones, lorſque dans un même intervalle de temps, ils font un nombre égal de vibrations.

491. On appelle *pendule ſimple*, un poids ou plutôt un point peſant P (fig. 83) attaché à l'extrémité d'un fil inflexible ſans peſanteur & ſans maſſe, arrêté par l'autre extrémité C à un point immobile.

492. On appelle *pendule compoſé*, celui où pluſieurs poids ou points peſants ſont attachés à un même fil inflexible ſans peſanteur & ſans maſſe.

493. Dans les pendules compoſés on appelle *centre d'oſcillation* le point du fil où il faudroit placer un ſeul point peſant, de ſorte qu'en ſuppoſant tous les poids ſupprimés, le pendule compoſé devînt un pendule ſimple, mais iſochrone au pendule compoſé.

494. Il eſt aiſé de concevoir qu'un pendule ſimple étant poſé dans une ligne verticale CP (fig. 83) il y doit reſter en repos, parce que l'immobilité du point de ſuſpenſion détruit tout l'effet de la peſanteur, à laquelle elle oppoſe un obſtacle invincible, dans une direction verticale, qui eſt la même que celle de la peſanteur, mais en ſens oppoſé : Que ſi par quelque coup donné au poids P ou à la verge, ou ſi par quelque autre maniere que ce ſoit, le pendule a

Digitized by Google

été porté jusques dans la position CA, puis abandonné à lui-même, aussi-tôt il retombera vers CP, en accélérant sa vîtesse. Supposons-le en quelque point de sa route, comme en N, & que la force absolue de la pesanteur qui le pousse à chaque instant vers le centre de la terre par des impulsions égales, soit exprimée par la droite verticale NG; en menant du point G sur la tangente NI la perpendiculaire GI, & en achevant le parallélogramme IH, il est évident 1°, que la force NG peut être décomposée dans les forces NH, NI, qui sont des forces de la même nature (407) que NG. 2°. Que la force NH étant dirigée au point de suspension, qui est immobile en C, est totalement détruite par la résistance de ce point. 3°. Que la force NI, qui devient la force relative de la pesanteur, poussera le corps vers P dans la direction NI, avec une vîtesse accélérée. 4°. Qu'en représentant la pesanteur par la quantité NG, constante & constamment verticale, la force relative NI est d'autant plus grande, & par conséquent la force NH de la pesanteur perdue par la résistance du point C, est d'autant plus petite, que l'angle NGI ou son égal GNH est plus grand: Or l'angle GNH est celui de l'inclinaison du pendule à l'égard de la verticale: Donc en mettant le pendule en mouvement, plus on l'aura écarté de la position verticale CP, plus la pesanteur aura procuré au poids P de grands degrés de vîtesse dans le sens NI de la tangente au cercle APK. Mais ensuite par le retour du pendule vers la position verticale CP, ces degrés de vîtesse diminuent, (en s'ajoutant cependant toujours à ceux qui sont déja acquis, depuis que le pendule a été abandonné à lui-même), & en même temps la résistance que fait le point de suspension à l'effet de la pesanteur NG, va en augmentant; de sorte que le pendule étant arrivé (par un mouvement composé de tous les degrés acquis de vîtesses, & par conséquent par un mouvement inégalement accéléré,) dans la position verticale CP, la force relative NI de la pesanteur est devenue nulle, mais le poids par son inertie conserve tous les degrés de vîtesse qu'il a

Digitized by Google

acquis depuis ſon départ du point A : c'eſt pourquoi il continue ſa route en remontant vers K. Or à meſure qu'il s'écarte de la verticale CP, la force relative de la peſanteur augmente de plus en plus toujours dans la tangente, mais dans le ſens *n i* oppoſé au ſens PK, que le poids ſuit alors ; puiſque la peſanteur tend toujours à ramener le poids P vers le point le plus bas. Cette force *n i* détruit donc ſucceſſivement tous les degrés de vîteſſe que le pendule avoit acquis depuis ſon départ du point A, & elle ne le laiſſe remonter que vers B, de ſorte que les arcs PB, PA ſoient égaux & décrits en temps égaux. Dans le point B le poids n'ayant plus aucun degré de vîteſſe pour continuer d'aller vers K, ſe trouve abandonné à l'effort de la peſanteur, de même qu'il s'étoit trouvé en A : la peſanteur lui procure des degrés de vîteſſe accélérée pour deſcendre vers P, puis les lui ôte en remontant vers A, & ainſi de ſuite. On voit auſſi que le pendule qui oſcille ſur le point fixe C, a les mêmes propriétés qu'un corps qui gliſſeroit en oſcillant ſans frottement dans la concavité du grand cercle d'une ſphere, dont le rayon ſeroit CP ; parce que le poids étant ſupporté par le cercle, c'eſt à ſon égard la même choſe, que d'être ſuſpendu par un fil attaché en C.

495. THEOREME I. *Si un corps deſcend d'un mouvement continu & libre le long de tant & de tels plans infiniment-petits contigus* HG, GF, FD (fig. 86) *inclinés comme on voudra, il aura en* D *au bas d'un de ces plans* FD, *la même vîteſſe que celle qu'il auroit acquiſe en tombant librement de* K *en* E, *qui eſt la hauteur du point* H *d'où il eſt parti, au-deſſus du point* D *où il ſe trouve.*

DEM. Le corps étant tombé librement de H en G, a acquis la même vîteſſe que celle qu'il auroit acquiſe, s'il étoit librement deſcendu le long de IG (122) : il eſt donc clair que puiſqu'il ne perd de ſa vîteſſe qu'une quantité infiniment petite du ſecond ordre, au détour qu'il eſt obligé de faire pour parcourir chaque plan (414), il aura une même vîteſſe en arrivant en F, que s'il étoit deſcendu ſeulement le long du plan IF ; donc il parcourra encore

le plan FD de la même maniere, que s'il étoit descendu tout de suite le long du plan KD, c'est-à-dire, (114) que s'il étoit tombé librement de K en E.

496. COROLL. I. *Si un corps descend librement le long d'une courbe quelconque, sa vîtesse à un point quelconque, est égale à celle qu'il eût acquise en tombant librement d'une hauteur égale.*

497. COROLL. II. *Un corps qui descend librement le long d'une courbe, étant arrivé au point le plus bas de la courbe, est capable de remonter à la même hauteur d'où il est descendu* (103), *en décrivant l'autre branche de la courbe :* comme on l'a expliqué à l'égard du pendule simple (494), de sorte qu'un corps mis une fois en mouvement dans la concavité d'une courbe, continueroit de descendre & de remonter toujours par la même route en temps égaux & de la même maniere, s'il ne perdoit de sa vîtesse par le frottement dans cette courbe, & par la résistance de l'air qu'il est obligé de fendre à chaque allée & retour.

498. THEOREME II. *Les temps de la descente libre d'un corps le long de deux figures ou de deux courbes semblables & semblablement inclinées à l'horizon, sont entr'eux comme les racines quarrées des dimensions homologues de ces deux figures.*

Soient ces deux figures représentées par les côtés infiniment-petits HG, GF, FD, &c. hg, gf, fd, (fig. 86) &c. proportionnels entr'eux, & semblablement inclinés sur l'horizon ; le temps de la chûte du corps le long de HG, est au temps de sa chûte le long de hg, comme $\surd$HG à $\surd hg$ (99). Par la même raison le temps de la descente le long de GF, est au temps de la descente le long de gf, comme $\surd$GF à $\surd gf$: or on suppose HG : hg :: GF : gf. Donc (Elem. 308) $\surd$HG : $\surd hg$ :: $\surd$GF : $\surd gf$. Donc le temps de la descente le long de GF, est au temps de la descente le long de gf, comme $\surd$HG à $\surd hg$. De même le temps de la descente le long de FD, sera au temps de la descente le long de fd, comme $\surd$HG à $\surd hg$ &c. Donc (Elem. 310) le temps de la descente le long de HG + GF + FD, est au temps de la descente le long de hg + gf + fd, comme $\surd$GH à $\surd hg$: c'est-à-dire comme les

Digitized by Google

racines quarrées de deux côtés, ou de deux dimensions homologues quelconques.

499. COROLL. *Les corps qui gliſſent en oſcillant dans la concavité de deux Spheres inégales, achevent leurs vibrations, c'eſt-à-dire, une allée ou un retour, en des temps qui ſont entr'eux comme les racines quarrées des arcs parcourus, ou comme celles des rayons de chaque Sphere*: parce que les Spheres ſont des figures ſemblables (Elem. 677).

500. THEOREME III. *La vîteſſe du pendule* CB (fig. 84) *arrivé en* B *dans la verticale qui paſſe par le point de ſuſpenſion* C, *eſt comme la corde* BK *de l'arc* KDB *qu'il a décrit en deſcendant depuis le point* K.

Menez KF perpendiculaire à CB, il eſt clair (495) que la vîteſſe que le pendule acquiert en décrivant l'arc KDB, eſt comme la vîteſſe qu'un corps acquerroit en tombant librement de F en B, c'eſt-à-dire, (99) comme $\sqrt{FB}$; or $\sqrt{FB}$ eſt comme BK. Car (Elem. 561) $\div$ BF. BK. BA. Donc (Elem. 316) $BF \times BA = BK^2$, donc à cauſe que BA eſt conſtant, BF eſt comme BK^2, & $\sqrt{BF}$ eſt comme BK: donc la vîteſſe que le pendule a acquiſe en B, après avoir décrit l'arc KDB, eſt comme la corde BK de cet arc.

501. THEOREME IV. *Le nombre* N *des vibrations d'un pendule, eſt dans un temps donné, réciproquement comme la racine quarrée de ſa longueur* L, ou $N = \frac{1}{\sqrt{L}}$.

Le nombre des vibrations d'un pendule quelconque eſt d'autant plus grand dans un temps donné, que la durée T de chaque vibration eſt plus courte: donc $N = \frac{1}{T}$. Mais les durées des vibrations ſont (498) comme les racines quarrées des longueurs, ou $T = \sqrt{L}$: donc $N = \frac{1}{\sqrt{L}}$.

502. COROLL. On aura donc auſſi $NN = \frac{1}{L}$: d'où il ſuit qu'*en connoiſſant la longueur de deux pendules* A, B, *& le nombre des vibrations de l'un* A *pendant une heure, on trouvera le nombre des vibrations de l'autre* B *pendant le même temps: en*

Digitized by Google

faiſant, comme la longueur du pendule B, *à la longueur du pendule* A, *ainſi le quarré du nombre des vibrations du pendule* A, *au quarré du nombre des vibrations du pendule* B.

503. En renverſant cette proportion, on trouvera quelle doit être la longueur du pendule B, pour faire un nombre déterminé de vibrations pendant un temps donné.

504. THEOREME V. *Les pendules ſimples dont les longueurs* SP, S*p* (fig. 85) *ſont comme les forces abſolues* G, *g des peſanteurs qui les animent, ſont iſochrones, & réciproquement.*

DEM. Soient MN, *mn* deux arcs homologues pris dans les quarts de cercle AMP, *amp*, décrits par les oſcillations des poids P, *p* animés des peſanteurs G, *g* : ayant tiré les perpendiculaires MD, *md*; NE, *ne*, à cauſe des arcs homologues, on a SD : *sd* :: DE : *de* :: MN : *mn* :: SP : *sp* :: G : *g*. Or par la formule $e = ptt$ (113), on voit que *e* ne peut être $= p$, que *tt* ne ſoit conſtant : C'eſt-à-dire, que les eſpaces MN, *mn* ne peuvent être comme les forces accélératrices G, *g*, que les temps ne ſoient égaux : donc chacun des arcs homologues de AMP, *amp* ſont décrits en même temps, donc tout le quart de cercle AMP eſt décrit en même temps que le quart de cercle *amp* : donc les deux pendules SP, *sp* ſont iſochrones.

505. COROLL. *On peut donc connoître le rapport des peſanteurs différentes, par celui des longueurs différentes des pendules iſochrones animés de ces peſanteurs.*

Des Pendules compoſés.

506. PROBLEME I. *Etant donnés deux poids inégaux en maſſe,* A *plus grand,* B *plus petit* (fig. 87), *poſés à égales diſtances de part & d'autre du point fixe* S, *d'une ligne inflexible & ſans maſſe, trouver le centre d'oſcillation* K *de ces deux poids.*

SOLUTION. Le point A comme plus peſant doit l'emporter ſur le point B, & par conſéquent deſcendre; mais il ne le peut faire que le poids B ne monte en même temps, & qu'ainſi le mouvement de B ne s'oppoſe à celui de A, &

Digitized by Google

n'en détruise une partie égale à tout le mouvement qu'a le corps B. Or en appellant p la force de la pesanteur, les forces ou les quantités de mouvement des masses A & B seront $p \times A$, $p \times B$ & leurs moments $p \times A \times AS$, $p \times B \times BS$: & à cause des constantes p, AS, BS, on peut supposer que le poids B détruit une partie du mouvement du poids A, de même que si B étoit transporté en A, avec une pesanteur négative par rapport à la pesanteur de A : Donc à la place du pendule AB, on peut supposer un autre pendule SA, qu'on regardera comme un pendule simple chargé en A d'une masse $A+B$ dont la quantité de mouvement est $p \times A - p \times B$, & dont par conséquent (482) la force accélératrice est $\frac{p \times A - p \times B}{A+B}$. Or (504) les longueurs des pendules simples isochrones, sont comme les forces accélératrices qui les animent : On trouve donc la longueur du pendule simple SK, isochrone au pendule SA, en faisant $\frac{p \times A - p \times B}{A+B} : p :: SA : SK = \left(\frac{A+B}{A-B}\right) \times SA$.

507. SCHOLIE. On voit par cette formule, pourquoi une balance oscille lentement sur le couteau qui porte sur l'appui suspendu, pour peu qu'on touche à l'un de ses bassins, ou à l'un des cordons. Car comme alors on communique un peu de force au bassin, laquelle en augmente ou diminue la force du poids selon la direction de la force communiquée, un de ces bassins devient un peu plus pesant que l'autre : ce bassin sera représenté par A dans notre formule, son bras par SA, l'autre bassin par B, & $SA \times \left(\frac{A+B}{A-B}\right)$, qui exprime la longueur du pendule simple isochrone aux balancements des bras, fait voir que ce pendule est d'autant plus long, & par conséquent les balancements des bras d'autant plus lents, que le bras SA est plus long, & que la force communiquée en touchant un bassin est plus petite ; parce qu'alors $\frac{A+B}{A-B}$ a une valeur

leur d'autant plus grande, que A — B eſt une quantité plus petite.

508. PROBLEME II. *Une verge* SA (fig. 88) *mobile ſur le point* S, *étant chargée des poids ou points peſants* B, C, D, *trouver le centre d'oſcillation* K.

SOLUTION. Si en un point A pris à volonté ſur la verge, on ſuppoſe une maſſe $= \frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SA^2}$, cette maſſe aura (486) une force accélératrice pour faire tourner la verge SA ſur le point fixe S, équivalente à la force compoſée des forces accélératrices des maſſes B, C, D. Or en appellant p la peſanteur qui anime les maſſes B, C, D, il eſt évident qu'il y auroit au point A une force égale à la ſomme des forces des maſſes B, C, D, pour faire tourner la verge. Ainſi à cauſe de la maſſe B, il y auroit en A une force $= \frac{p \times B \times SB}{SA}$ (481) : à cauſe de la maſſe C, il y auroit en A une force $= \frac{p \times C \times SC}{SA}$: à cauſe de la maſſe D, il y auroit en A une force $= \frac{p \times D \times SD}{SA}$; donc il y auroit en A une force totale $= p \times \left(\frac{SB \times B + SC \times C + SD \times D}{SA}\right)$ & l'on trouveroit (482) l'expreſſion de la force accélératrice qui animeroit le corps A, en diviſant cette force par la maſſe en A, laquelle eſt $\frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SA^2}$; on auroit donc $\frac{p \times SA \times (SB \times B + SC \times C + SD \times D)}{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}$, & par conſéquent en diſant, Comme cette force accélératrice, eſt à la force de la peſanteur p : ainſi SA eſt à SK ; on trouve $SK = \frac{SB^2 \times B + SC^2 \times C + SD^2 \times D}{SB \times B + SC \times C + SD \times D}$.

509. SCHOLIE. Si l'un des poids comme C (fig. 89) ſe trouvoit au-delà du point S, alors on prendroit $Sc = SC$; & en ſuppoſant en c une maſſe égale à la maſſe C, mais animée d'une peſanteur négative, on trouveroit, en faiſant le calcul ſelon la méthode précédente, qu'il n'y a que le

Digitized by Google

terme SC×C dans le dénominateur qui devient négatif. Il en eſt ainſi des autres corps qui pourroient être au-delà du point de ſuſpenſion S.

510. COROLL. I. Si on ſuppoſoit égaux tous les poids B, C, D &c. alors en les faiſant chacun = 1, on auroit $SK = \frac{SB^2+SC^2+SD^2}{SB+SC+SD}$. D'où il eſt aiſé de conclure, que ſi SD eſt une verge peſante inflexible, d'une matiere homogene & d'une figure uniforme ſuſpendue en ſon extrêmité S, la diſtance SK de ſon centre d'oſcillation K au point de ſuſpenſion, ſeroit repréſentée par la ſuite infinie des ſecondes puiſſances des nombres naturels, diviſée par la ſuite infinie de leurs premieres puiſſances, & par conſéquent (Elem. 383) SK ſeroit égal à $\frac{1}{3}SD^3$ diviſé par $\frac{1}{2}SD^2$, parce que SD repréſenteroit la derniere des diſtances du point S aux points ſucceſſifs, qui compoſent la longueur de l'axe de la verge: donc $SK = \frac{2}{3}SD$. Ce qui fait voir que *dans une verge homogene & uniforme, le point de percuſſion eſt le même que le centre d'oſcillation; & le point de ſuſpenſion eſt le même que le centre de converſion.*

511. Cette identité des centres de percuſſion & d'oſcillation a lieu dans preſque tous les cas, ſur-tout lorſque les mouvements ſe font dans des milieux également libres; mais nous ne pouvons entrer là-deſſus dans aucun détail. Il ſuffira de remarquer comme une regle générale: Qu'*une verge chargée de tant de poids que l'on voudra, étant miſe en mouvement autour d'un point fixe, elle exerce ſur les corps qu'elle rencontre, ſa plus grande action poſſible, lorſque le choc ſe fait à ſon centre d'oſcillation*, parce qu'en ce point la force du choc eſt la même que s'il y avoit une ſeule maſſe égale à la ſomme de toutes celles dont la verge eſt chargée, ou encore parce que ce point eſt le point d'appui d'un levier chargé de tous ces poids, & dont la longueur ſe compte entre les deux poids extrêmes. Car ſoit le pendule SA (fig. 82) compoſé des poids A & B, dont le centre d'oſcillation eſt en K, je dis 1°, que le point K eſt le point d'appui des poids A & B, dont le levier AB eſt chargé.

Digitized by Google

Car puiſque les poids A, B tournent enſemble autour du point S, leurs vîteſſes ſont comme leurs diſtances SA, SB, & leurs forces ou moments rapportés au point S comme SA×A, SB×B. Or puiſque (508) $SK = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, on a $KB = \frac{SA^2 \times A + SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B} - SB$, & $KA = SA - \frac{SA^2 \times A - SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$: mettant en fraction & réduiſant, $KB = \frac{SA^2 \times A - SA \times SB \times A}{SA \times A + SB \times B}$, & $KA = \frac{SA \times SB \times B - SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$, ſi donc le point K eſt le point d'appui du levier, dont l'un des bras KB, ſoutenant la force du poids B, laquelle eſt SB×B, garde l'équilibre avec le bras KA qui ſoutient la force du poids A, laquelle eſt SA×A; il faut (335) que le moment KB×SB×B ſoit égal au moment KA×SA×A. Subſtituant à KB, KA leurs valeurs, on trouve que les deux moments ſe réduiſent également à $\frac{SA^2 \times A \times SB \times B - SA \times A \times SB^2 \times B}{SA \times A + SB \times B}$. 2°, Comme il eſt évident que le point d'appui K du levier AB, eſt le point où les efforts de toutes les puiſſances appliquées au levier ſont ſoutenus, il ſuit que c'eſt le point capable du plus grand choc, de quelque façon que ce levier ſoit mis en mouvement: & c'eſt de-là que ce point a pris le nom de *centre de percuſſion.*

512. COROLL. II. Si l'on regarde tous les eſpaces compris entre chacune des doubles ordonnées conſécutives infiniment proches, qui rempliſſent l'aire d'une courbe $AB\mu$ (fig. 48) depuis le ſommet A juſqu'à $B\mu$ comme autant de petits poids, dont les centres de gravité ſont les points conſécutifs de l'axe $A\pi$; comme ſi l'eſpace $NMmn$ repréſentoit le poids C du n°. 508, on auroit $\frac{SC^2 \times C}{SC \times C} = \frac{AP^2 \times MN \times Pp}{AP \times MN \times Pp}$ ou en faiſant $MN = 2y$, $AP = x$, $Pp = dx$; on auroit $\frac{2yxxdx}{2yxdx} = \frac{yxxdx}{yxdx}$, & la ſomme de toutes les expreſſions ſemblables des poids ou eſpaces qui rempliroient l'aire de la courbe, ſeroit $\frac{\int yxxdx}{\int yxdx}$, formule dont l'intégrale, faite après qu'on aura ſubſtitué à y ſa valeur en x, déduite de l'Équation à la courbe, donnera la longueur AQ du pendule ſim-

ple, isochrone à la courbe qui oscilleroit sur le point de suspension A; ainsi le point Q seroit le centre d'oscillation de la courbe. Comme si la courbe BAμ étoit une parabole, à cause de $yy=x$, on a $y=x^{\frac{1}{2}}$, & par conséquent $\int yx^2\,dx=\int x^{\frac{5}{2}}dx$, & $\int y\,x\,dx=\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$: l'intégrale de $\int x^{\frac{5}{2}}dx$ est (Elem. 961) $\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}$: celle de $\int x^{\frac{3}{2}}\,dx$ est $\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}$: divisant la premiere par la seconde, on a $\frac{10}{14}x^{\frac{2}{2}}=\frac{5}{7}x$. Si donc $A\pi=x$, la distance du sommet A au centre d'oscillation Q, ou $AQ=\frac{5}{7}A\pi$.

513. De ces deux corollaires, il suit 1°, Que la théorie des centres d'oscillations dans les pendules composés est susceptible de recherches aussi étendues qu'utiles, qui sont même absolument nécessaires dans les calculs des effets des mouvements des corps assujettis à tourner autour d'un point fixe ou mobile, puisque tout l'effort de ces corps sur ceux qu'ils rencontrent se trouve réuni à leur centre d'oscillation ou de percussion. 2°, Que comme les différents corps ainsi mus & choquants peuvent être censés réduits à différents plans, à différentes figures, ou à différents polyhedres, &c. suspendus ou attachés à un de leurs points quelconque, pris en dedans ou en dehors, autour duquel ils oscillent, la recherche de leurs centres d'oscillation & de percussion, ne peut gueres se faire que par le Calcul intégral. C'est pourquoi nous nous contenterons ici d'en avoir démontré la formule générale, & indiqué la méthode de s'en servir.

514. PROBLEME III. *Une verge* SA (fig. 90) *pesante, d'une matiere homogene, d'une figure uniforme, & mobile sur l'extrêmité fixe* S, *étant chargée vers l'autre extrêmité d'un poids* A *dont le rapport avec le poids de la verge est donné, trouver le centre d'oscillation* K.

La solution de ce Problême se tire aisément de la formule $SK=\frac{SA^3\times A+SB^2\times B}{SA\times A+SB\times B}$, où il faut supposer que B exprime le poids de la verge, & que $SB=\frac{2}{3}SA$, parce que le centre d'oscillation de la verge en particulier est aux deux tiers de sa longueur, après quoi le reste est facile. Soit $SA=1$, donc $SB=\frac{2}{3}$: soit $B=\frac{1}{10}A$, on trouve $SK=\frac{141}{144}=\frac{47}{48}$. Si on veut une formule particuliere pour

Digitized by Google

la ſolution de ce problême, qui a lieu dans tous les pendules ſimples qu'on peut conſtruire, puiſqu'on ne peut trouver dans la nature de verge inflexible ſans peſanteur, en appellant $\frac{A}{n}$ le poids de cette verge, on trouvera $SK = \frac{9n \times SA + 4SA}{9n+6}$.

Du mouvement du Pendule ſimple dans la Cycloïde.

Origine & propriétés de la Cycloïde.

515. SI ſur la droite AB (fig. 93) on fait rouler un cercle ATV qui la touche au point A, ce point A en faiſant un tour entier décrira par un mouvement compoſé du rectiligne & du circulaire, une courbe ACEB. On l'appelle *la Cycloïde*, *la Roulette*, *la Trochoïde*. La droite AB s'appelle *la Baſe*, & il eſt évident que ſa longueur eſt égale à la circonférence du cercle roulant ATV. La perpendiculaire FE à ſon point de milieu F s'appelle *l'axe*, le point E *le ſommet*, le cercle ATV, ou DCH, ou FGE, qui eſt le même dans des ſituations différentes, s'appelle *le cercle générateur*.

516. Le cercle générateur roulant uniformément ſur AB, il eſt évident qu'en vertu de cela ſeul ſon centre doit décrire uniformément une droite YZ parallele & égale à AB qui paſſe par le milieu entre E & F. Mais ſi indépendamment de ce mouvement, le centre avoit reçu d'ailleurs un mouvement particulier dans le ſens AB, ou dans le ſens oppoſé; alors il eſt clair que YZ ſeroit égale à la ſomme ou à la différence de ces deux mouvements du centre, & que chaque point de la circonférence du cercle générateur en venant paſſer à ſon tour ſur AB, y gliſſeroit en vertu de ce mouvement particulier du centre, qui entraîneroit toutes les parties du cercle à la fois dans le même ſens, ce qui feroit que la baſe AB de la cy-

Digitized by Google

cloïde ſeroit plus longue ou plus petite que la circonférence du cercle générateur, & que la cycloïde ſeroit alors une cycloïde *alongée ou accourcie.*

517. Si on ſuppoſoit encore que le cercle générateur roulât non ſur une droite, mais ſur la circonférence d'un cercle, la courbe s'appelleroit une *Epicycloïde ſphérique, ſimple, alongée ou accourcie*, ſelon que le centre du cercle générateur auroit un mouvement particulier, ou nul, ou dans le ſens ſelon lequel le cercle roule, ou dans un ſens oppoſé.

518. D'où l'on voit en général, qu'*un point qui tourne autour d'un centre, lequel eſt emporté lui-même par quelque mouvement, décrit une courbe du genre des cycloïdes.* Mais quoique les propriétés des cycloïdes & des épicycloïdes ſoient d'un grand uſage dans la Méchanique, nous ne parlerons ici que de la cycloïde ſimple.

519. LEMME I. *Si d'un point quelconque* C *de la cycloïde on mene* CL *parallele à la baſe* AB, *& qui coupe en* G *le cercle générateur* FGE *décrit ſur l'axe* FE, *l'arc de cercle* EG *ſera égal à la droite* CG, *& ſa corde* EG *ſera parallele à* CH *tangente à la cycloïde au point* C.

DEM. La demi-circonférence du cercle générateur eſt $= \frac{1}{2}AB = AF$. Or l'arc $CD = AD$; donc l'arc $CH = GE = DF = IK = CG = HE$. Maintenant l'arc infiniment-petit de la cycloïde au point C eſt formé par le bout C de la corde CD qui tourne ſur le point D: donc (Elem. 461) CH perpendiculaire à CD eſt une tangente à cet arc infiniment-petit, & par conſéquent à la cycloïde au point C. Et à cauſe des arcs égaux CH, GE, leurs cordes CH, GE, ſont égales, & forment avec les droites paralleles & égales HE, CG un parallélogramme CHEG. Donc CH eſt parallele à EG.

520. COROLL. *Pour mener une tangente à un point quelconque* C *de la cycloïde, il faut mener* CK *parallele à la baſe* AB, *qui coupe en* G *le cercle générateur décrit ſur l'axe: & ayant tiré la corde* GE, *il faut du point* C *lui mener la parallele* CH, *qui ſera la tangente demandée.*

Digitized by Google

521. LEMME II. *La corde* E M *de l'arc du cercle générateur interceptée entre le ſommet* E *de la cycloïde & la droite* LK *menée par le point* M *parallélement à la baſe* BA, *eſt la moitié de l'arc* EL *de la cycloïde.*

Menez SQ parallele & infiniment proche de LK qui coupe le cercle générateur en R, la corde prolongée en P; joignez ER; du centre E avec le rayon ER décrivez l'arc infiniment-petit RO, qui ſera une droite perpendiculaire ſur MP. Par les points E, M du cercle, menez-lui les tangentes EN, MN; & par le point L, menez LX tangente à la cycloïde. Les triangles EMN, MRP ſont ſemblables (Elem. 569); car la tangente au point E eſt perpendiculaire à l'axe EF, & parallele aux droites BF, LK, SQ; d'où il ſuit que l'angle ENM = RPM. L'arc infiniment-petit RM eſt confondu avec la tangente MN, donc l'angle RMP eſt oppoſé au ſommet & égal à l'angle EMN. Or (Elem. 545) EN = NM; donc RP = RM; donc, à cauſe de la perpendiculaire RO, MO = $\frac{1}{2}$MP. (Elem. 500) Mais MO eſt l'élément infiniment-petit dont la corde EM varie, & MP eſt l'élément dont l'arc EL de la Cycloïde varie en même-temps: car comme (519) EM eſt parallele à la tangente LX, l'arc infiniment-petit LS eſt égal à la droite infiniment-petite MP. Donc la corde EM ne varie que de la moitié de ce dont l'arc de la Cycloïde varie en même temps, donc la corde entiere n'eſt que la moitié de l'arc de la Cycloïde.

522. COROLL. *Le contour de la Cycloïde eſt quadruple du diametre de ſon cercle générateur.*

523. PROBLEME. *Faire enſorte que le poids d'un pendule ſimple décrive une Cycloïde donnée.*

Soit donnée la Cycloïde AVB (fig. 92) décrite ſur la baſe AB. Prolongez ſon axe VD en C, de ſorte que DC = DV, & par C menez EF parallele à AB, faites CE = CF = AD = DB: ſur CE, CF, ſoient ſuppoſées décrites deux demi-Cycloïdes CTA, C*t* B dont les axes ſoient EA, FB égales à CD ou à DV, & dont par conſéquent les ſommets A, B touchent la baſe AB de la Cy-

cloïde AVB aux points A & B. Ayant pris le point C pour le point de ſuſpenſion, attachez un point peſant P à un fil égal à CV & parfaitement fléxible : faites faire à ce poids P des vibrations dans le plan de ces Cycloïdes, enſorte que le fil ſe ploye par ſa partie ſupérieure ſur chaque demi-Cycloïde comme en CT, & que l'autre bout TP de ce fil reſte en ligne droite, je dis qu'à chaque vibration le poids P ſera toujours dans la Cycloïde AVB.

DEM. Sur les axes EA, DV décrivez les cercles générateurs EGA, DHV, menez TG, PH paralleles à la baſe AB, & joignez AG, DH; la demi-Cycloïde ATC = 2AE (521) = CV = CTP, donc l'arc TA de la Cycloïde eſt égal au reſte TP du fil qui touche la Cycloïde en T. Donc puiſque GA eſt parallelle & égale à TK (519), & que 2GA ou 2TK = TA = TP, on a TK = KP, & les paralleles TG, PH, ſont également éloignées de la baſe AB. Donc (Elem. 456) les arcs GA, HD des demi-cercles générateurs ſont égaux entr'eux, & leurs cordes GA, HD ſont égales entr'elles & à KP; donc ces trois droites égales GA, PK, HD étant compriſes entre les paralleles également éloignées GT, AD, PH ſont auſſi paralleles entr'elles : Donc HDKP eſt un Parallélogramme, & DK = HP : donc la droite AK étant égale à GT ou (519) à l'arc AG ou DH, on a HP ou DK égal à l'arc reſtant VH. Donc (519) le point P eſt dans la Cycloïde donnée AVB.

524. THEOREME I. *Si l'axe* DV *de la Cycloïde eſt perpendiculaire à l'horizon, & ſi le pendule en oſcillant s'avance juſqu'à un point quelconque* L : *ſa viteſſe en un point quelconque* M, *eſt comme* $\sqrt{VL^2 - VM^2}$; *ou ſi l'arc* VNL *de la Cycloïde eſt ſuppoſé redreſſé dans une droite* VL, *les arcs* VM, VN *étant redreſſés dans la même droite en* VM, VN : *ſi enſuite on fait de* VL *le rayon d'un demi-cercle* PZL ; *la viteſſe au point* M *de la Cycloïde, eſt comme le ſinus* MX.

Des points L, M, menez ſur l'axe DV les perpendiculaires LR, MS qui rencontrent le demi-cercle générateur DOV aux points O, Q. Tirez OV, QV. Il eſt clair

Digitized by Google

(496) que la vîteſſe du pendule en M acquiſe en décrivant l'arc LM, eſt égale à celle d'un corps qui ſeroit tombé de R en S, c'eſt-à-dire, que la vîteſſe en M eſt comme $\sqrt{RS}$, ou que ſon quarré eſt comme RS, ou comme RV—SV. Or (Elem. 296.) RV—SV eſt comme RV×VD—SV×VD. Et à cauſe des perpendiculaires OR, QS, (Elem. 561) RV×VD=VO², & SV×VD=VQ². Donc RV—SV eſt comme VO²—VQ². Or (521) VO=½VL, & VQ=½VM, donc VO²=¼VL², & VQ²=¼VM²: Donc VO²—VQ²=¼VL²—¼VM²: ôtant les conſtantes, VO²—VQ² eſt comme VL²—VM²; donc RV—SV ou RS, ou le quarré de la vîteſſe en M, eſt comme VL²—VM²: Donc la vîteſſe en M eſt comme $\sqrt{VL^2-VM^2}$.

Mais à cauſe du rayon VL ou VX égal à l'arc VML, dans le triangle rectangle VXM, on a VX² ou VL²=VM²+MX² (Elem. 562) donc MX=$\sqrt{VL^2-VM^2}$; donc la vîteſſe en M eſt comme MX.

525. THEOREME II. *Les mêmes choſes étant poſées comme ci-deſſus, ſi un corps tournoit autour du point* V *dans le demi-cercle* LZP, *enſorte que ſa vîteſſe fût uniforme & égale à celle que le Pendule* CP *a acquiſe en* V *après avoir deſcendu du point* L: *je dis que ce corps décriroit un arc quelconque* XY *compris entre les ſinus* MX, NY, *dans le même temps que le Pendule* CP *ayant commencé ſa vibration au point* L, *décriroit l'arc* NM *de la Cycloïde, & que par conſéquent le temps que le pendule employe à décrire l'arc de Cycloïde* MN *eſt comme l'arc de cercle* XY.

DEM. Prenez ſur la Cycloïde un arc M*m* infiniment-petit, & ſur le rayon VL ſa partie égale M*m*: tirez du point *m* le Sinus *m x* infiniment proche du Sinus MX, & par X menez X*r* parallele à M*m*. La vîteſſe M*m* dans la Cycloïde eſt (524) comme *m x* ou comme MX, (les vîteſſes étant uniformes dans des arcs & des temps infiniment-petits,) & on a ſuppoſé que la vîteſſe dans le cercle PZL étoit uniforme, & comme VZ ou comme VX. Or à cauſe des triangles ſemblables MXV, *r*X*x* on a X*x*: X*r*

Digitized by Google

ou M*m* :: VZ ou VX : MX : donc les petits arcs X*x*, M*m* ſont entr'eux comme les vîteſſes avec leſquelles ils ſont parcourus : Donc (57) ils ſont parcourus en même-temps ; donc l'arc de Cycloïde MN eſt décrit en même-temps que l'arc de cercle XY. Or à cauſe du mouvement uniforme dans le cercle, les temps ſont comme les arcs parcourus (56). Donc le temps que le Pendule employe à décrire l'arc MN de la Cycloïde en oſcillant librement depuis L, ou celui qu'un corps qui tourne autour du point V employe à décrire l'arc XY avec la vîteſſe que le Pendule a acquiſe en V, eſt comme l'arc de cercle XY.

526. THEOREME III. *Le temps d'une vibration quelconque dans une Cycloïde, eſt au temps de la chûte libre d'un corps le long de l'axe de cette Cycloïde, comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diametre ; ou comme* 355 *à* 113.

DEM. Le temps employé par un corps à parcourir le demi-cercle LZP avec toute la vîteſſe VZ, eſt au temps que le même corps employeroit à parcourir uniformément & avec la même vîteſſe le rayon VL, comme LZP eſt à VL, ou comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diametre. Or le temps employé à parcourir le demi-cercle LZP avec la vîteſſe VZ eſt (525) égal au temps employé par le pendule à décrire l'arc de Cycloïde LVP ; & le temps employé par un corps à parcourir uniformément le rayon VL avec la vîteſſe VZ, eſt égal au temps de la chûte libre d'un corps le long de l'axe DV de la Cycloïde. Car le rayon VL étant égal à l'arc LMV qui eſt double de la corde OV (521) ; tandis que le rayon VL ſeroit parcouru uniformément, ſa moitié, qui eſt la corde OV, ſeroit parcourue par un mouvement uniformément accéléré (96) : or (118) le temps de la deſcente d'un corps le long d'une corde quelconque d'un cercle, eſt égal au temps de ſa chûte libre le long du diametre de ce cercle. Donc le temps employé à parcourir uniformément le rayon VL avec la vîteſſe VZ, eſt égal à celui de la chûte libre d'un corps le long de l'axe DV de la Cycloïde. Donc le temps employé par le Pendule à décrire l'arc de Cycloïde LVP,

Digitized by Google

eſt au temps de la chûte libre d'un corps le long de l'axe de la Cycloïde, comme la circonférence d'un cercle eſt à ſon diametre, ou environ comme 355 à 113 (Elem. 615).

527. COROLLAIRE. *Donc les temps des vibrations d'un même Pendule dans une même Cycloïde ſont égaux entr'eux : ou les vibrations d'un même Pendule dans la même Cycloïde ſont toujours iſochrones, quelque grande ou quelque petite étendue qu'elles ayent, ou*, ce qui eſt le même, *en quelque point de la Cycloïde que le pendule commence ſa vibration.*

Application & uſages de toute la Théorie précédente.

528. Gallilée a découvert le premier la véritable Théorie de la chûte des Corps, il en conclut auſſi l'égalité & l'iſochroniſme des oſcillations du Pendule ſimple, & fit voir ſon utilité pour meſurer exactement le temps. M. Huygens appliqua depuis le Pendule aux Horloges à roues vers l'an 1657, il calcula quel étoit le nombre le plus avantageux de roues, & le nombre des dents de chaque roue, & de chaque pignon, propre à faire que l'effort d'un poids appliqué au tambour de la derniere roue, ne pouſſât le Pendule attaché à l'axe de la premiere roue, que de ſeconde en ſeconde de temps, c'eſt-à-dire, 60 fois par minute. Il détermina enſuite, par expérience, quelle étoit la longueur néceſſaire à un Pendule ſimple, pour faire préciſément une vibration par chaque ſeconde, & il la détermina de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ du pied de Roi : par ce moyen il conſtruiſit les Horloges appellées *Horloges à Pendule*, qui nous font connoître le temps avec une préciſion, que les Anciens n'auroient jamais oſé eſpérer.

529. Il eſt certain que ſans la réſiſtance de l'air & le frottement de la verge ou la roideur du fil au point de ſuſpenſion, un Pendule ſimple mis une fois en mouvement, devroit continuer d'y être perpétuellement, & de décrire toujours les mêmes arcs en même-temps. Mais la réſiſtance de l'air que le poids & la verge du pendule ſont obligés de fendre à chaque vibration, lui faiſant diminuer inſenſiblement ces arcs, fait auſſi diminuer le temps qu'il employe à les décrire : de ſorte qu'après un certain temps un Pendule mis en mouvement & qui décrivoit d'abord des arcs de 20 ou 30 d. de part & d'autre de la verticale, en décrit enſuite de plus petits ; la ſomme de ſes oſcillations pendant la premiere heure, eſt moindre que celle de l'heure ſuivante, & quoique la différence ſoit très-petite, elle mérite cependant qu'on y remédie, s'il eſt poſſible, à cauſe de l'importance qu'il y a de connoître exactement le temps, ſur-tout pour les Obſervations Aſtronomiques.

530. Quoique le poids appliqué aux Horloges à pendule dût par l'action continuelle de ſa peſanteur empêcher que les oſcillations du pendule ne vinſſent à ſe rallentir, cependant comme il arrivoit par dif-

Digitized by Google

férentes circonſtances que l'action de cette peſanteur n'étoit pas égale ; ni le jeu des pieces de l'horloge toujours également libre, qu'enfin l'étendue des oſcillations d'un pendule pouvoit être altérée par un grand nombre d'autres cauſes phyſiques, on a cherché les moyens d'obvier à tous ces inconvénients, & de rendre parfaitement iſochrones toutes les vibrations d'un même pendule de quelque étendue qu'elles fuſſent. M. Huygens y parvint, ayant découvert qu'un même pendule qui oſcilleroit dans une Cycloïde y feroit ſes vibrations en temps égaux, quelqu'inégaux que fuſſent d'ailleurs les arcs décrits : il appliqua donc la Cycloïde au Pendule, avec cette différence qu'au lieu de faire ces Cycloïdes égales à toute la longueur du Pendule comme nous l'avons fait, il ſe contenta de mettre aux deux côtés du point de ſuſpenſion deux petites lames courbées en arcs de Cycloïde, parce qu'il ſuffit que le fil du Pendule ſe ploye ſur une partie de chaque Cycloïde.

531. Cette correction qui eſt en effet très-ingénieuſe, fut dans ſon temps généralement reçue & applaudie ; cependant on ne l'employe plus à préſent, 1°, à cauſe de la difficulté de courber exactement des lames en arcs de Cycloïde ; 2°, parce qu'on a trouvé la maniere de conſtruire des Echappements qui n'ont pas de frottement ſenſible ; 3°, parce que l'expérience a fait voir que le Pendule qui décrit de petits arcs de cercle de 2 ou 3 degrés de part & d'autre de la verticale, les décrit en temps aſſez exactement égaux. On peut s'en convaincre en faiſant réflexion que la courbure de la Cycloïde vers V, (fig. 92) eſt très-ſenſiblement égale à celle d'un cercle dont le rayon ſeroit CV : donc s'il y a iſochroniſme dans tous les arcs de la Cycloïde, il doit être auſſi dans l'arc de cercle qui ſe trouve vers V. Et c'eſt là une des connoiſſances que la Cycloïde nous a procurée.

532. La Théorie du mouvement dans la Cycloïde a fourni à M. Huygens un moyen de calculer, plus exactement qu'on n'auroit pu déterminer immédiatement par expérience, quel eſt l'eſpace parcouru par un corps peſant dans la premiere ſeconde de ſa chûte libre. On peut déterminer par expérience, & par des obſervations aſtronomiques, quelle doit être la longueur du fil CV, afin qu'il faſſe dans la Cycloïde, ou dans un petit arc de cercle, une vibration en une ſeconde de temps préciſément : on ne doit pas ſe tromper de $\frac{1}{10}$ de ligne dans cette détermination, ſi l'on y donne toutes les attentions néceſſaires. M. Huygens & M. Picard l'avoient trouvée, comme j'ai dit, de 3 pieds 8 lignes $\frac{1}{2}$ ou de 440,5 lignes ; & M. de Mairan recommençant ces expériences en 1735 avec tout le ſoin imaginable, l'a trouvée de 440,57 lignes : Donc (526) comme 355 eſt à 113, ainſi 1 ſeconde ou 60 tierces de temps d'une vibration dans la Cycloïde, ſont à 19 tierces $\frac{35}{355}$ temps de la chûte libre d'un Corps le long de l'axe DV de la Cycloïde, c'eſt-à-dire, à deſcendre de la moitié de CV, ou de 220,285 lignes. Or dans les chûtes libres, les eſpaces étant comme les quarrés des temps (99), le quarré de $19\frac{35}{355}$ eſt à 220,285 lignes : comme le quarré de 60 tierces eſt à 2174,128 lignes, eſpace parcouru par une chûte libre dans les 60 premieres tierces, ou dans la premiere ſeconde de la chûte. Cet eſpace

Digitized by Google

réduit en pieds eſt de 15 pieds 1 pouce 2 lignes, & un peu plus.

533. On peut encore conclure de cette Théorie, qu'on a un moyen ſûr de conſerver les meſures des longueurs, comme les pieds, les toiſes, &c. dans un pays où l'on aura déterminé exactement celle du pendule ſimple; & que ſi la longueur du pendule ſimple étoit par-tout la même, on auroit par ſon moyen une meſure univerſelle : mais on a reconnu par beaucoup d'expériences faites depuis 1672 (c'eſt M. Richer qui fit alors cette découverte,) que plus on s'approche ſur terre des pays voiſins de l'Equateur, plus le pendule ſimple doit être court pour battre les ſecondes.

534. Cela fit conclure 1°, que la peſanteur eſt moindre ſous l'Equateur que ſous les poles. Puiſque (504) les longueurs des pendules ſimples iſochrones, ſont comme les peſanteurs qui les animent.

535. De-là on conclut, 2°, que la terre n'a pas une figure véritablement ſphérique, mais qu'elle doit avoir la figure approchante d'un Ellipſoïde formé par la révolution d'une Ellipſe ſur ſon petit axe : qu'ainſi elle étoit applatie vers les Poles, & renflée vers l'Equateur. Car toutes les eaux qui couvrent la moitié de ſa ſurface & qui ſe communiquent, ſont en équilibre entr'elles & avec toutes les parties qui compoſent la maſſe de la terre. Si donc on conçoit un canal PC (fig. 91) rempli d'un fluide depuis le Pole P de la terre juſqu'à ſon centre C, qui communique & qui ſoit en équilibre avec un autre canal CE, rempli du même fluide depuis le centre C, juſqu'à la ſurface de la terre en E, où répond l'équateur, il faut, ſi la peſanteur eſt moindre vers E que vers P, que le canal CE ſoit plus long que le canal PC, ſans quoi il ne peut y avoir d'équilibre ſuivant les regles de l'hydroſtatique : il faut donc que la terre ſoit plus élevée vers l'Equateur, & plus affaiſſée vers les Poles.

536. On en conclut 3°, que dès que la terre n'étoit pas ſphérique, la direction de la peſanteur, qui ſelon toutes les expériences eſt exactement perpendiculaire à la ſurface de la terre, ne paſſe pas par le centre de la terre, ſi ce n'eſt à l'égard des corps placés ſur l'Equateur & ſous les poles. Mais l'écart eſt trop petit pour qu'il faille y avoir égard dans aucune des pratiques de la Méchanique.

537. M. Richer avoit trouvé le Pendule plus court à Cayenne (c'eſt-à-dire, à 100 lieues de diſtance de l'Equateur) de 1 ligne $\frac{1}{4}$ qu'à Paris. M. Huygens en conclut que l'axe de la Terre devoit être moindre que le diametre de l'Equateur de $\frac{1}{578}$ ou d'un peu plus de cinq de nos lieues communes, & cela en ſuppoſant que la peſanteur de la colonne CE fût uniforme dans toute ſa longueur, & celle de la colonne CP auſſi uniforme dans toute ſa longueur CP. Mais Newton ayant poſé pour fondement de ſon ſyſtême, que la peſanteur décroît en raiſon inverſe des quarrés des diſtances des corps peſants au centre de la terre, trouva que l'axe de la terre étoit au diametre de l'Equateur comme 229 à 230, ou que l'excès de ces deux axes étoit d'environ 13 lieues. On a fait depuis par ordre du Roi beaucoup d'expériences & d'obſervations pour vérifier ces calculs, par des meſures priſes ſur la ſurface de la terre

Digitized by Google

même; & il en a réſulté que la terre avoit effectivement la figure d'un ſphéroïde un peu plus applati que Newton ne l'avoit conclu de ſa théorie, ce qui a ſervi à démontrer que la peſanteur des corps décroiſſoit réellement à meſure qu'ils s'éloignent du centre de la terre.

538. On a encore trouvé par le moyen du pendule une autre preuve directe de la diminution de la peſanteur, à meſure que les corps s'éloignent du centre de la terre, en déterminant par des obſervations réitérées la longueur du pendule ſimple à ſecondes, au pied & au ſommet des hautes montagnes. C'eſt ainſi que M. Bouguer a conclu par un grand nombre d'expériences, que ſous l'Equateur le pendule ſimple à ſecondes avoit au bord de la mer 439, 21 lignes de longueur; à 1466 toiſes au-deſſus du niveau de la mer, il en avoit 438,88 lignes; & à 2434 toiſes au-deſſus du même niveau, il avoit 438,69 lignes, toutes réductions faites.

539. Toute la théorie phyſique de l'Aſtronomie eſt fondée ſur cette loi générale, que *tous les corps peſent les uns ſur les autres en raiſon directe de leurs maſſes, & en raiſon inverſe des quarrés de leurs diſtances mutuelles.*

540. Nous avons ſuppoſé dans tout ce traité, que les milieux ou eſpaces dans leſquels s'exécutent tous les mouvements, étoient parfaitement libres, & que la denſité ni la tenacité de la matiere qui les remplit, n'y apportoient aucune réſiſtance, & n'y cauſoient aucun changement; ce qui n'eſt pas véritable, ſur-tout à l'égard des corps qui ſont près de la ſurface de la terre, ou dans tout l'eſpace rempli d'air qui l'environne, mais ſeulement à l'égard des corps céleſtes, dont pluſieurs traverſent librement & en tout ſens tout le ſyſtême Planétaire. Mais outre que la théorie de la réſiſtance des milieux eſt très-difficile & très-étendue, nous ne pourrions en parler ici ſans ſuppoſer une connoiſſance aſſez approfondie des propriétés des fluides, & des lignes courbes qui n'appartiennent pas à la Géométrie élémentaire.

FIN.

SBN
608806
Biblioteca Nazionale NAPOLI
Digitized by Google

TABLE

DES TITRES ET DES MATIERES.

Notions Préliminaires.

DU Mouvement en général, des circonſtances, & des différentes ſortes de Mouvements, page 1
Des expreſſions des rapports dont on ſe ſert dans la Méchanique, 3
Axiomes ou Principes ſur leſquels ſont fondées toutes les démonſtrations de la Méchanique, 5
Maniere d'exprimer l'effet qui réſulte du concours de pluſieurs cauſes, *ib.*
Des differentes ſortes de Corps, & de leurs propriétés générales, 9
De la Puiſſance ou Force, 11

PREMIERE PARTIE.

Du Mouvement rectiligne.

Du Mouvement rectiligne réel, ſimple & uniforme, 12
Du Mouvement compoſé, abſolu & uniforme, 16
Calcul des Mouvements compoſés, 21
Pourquoi la ſomme des forces compoſantes excede la force compoſée qui en réſulte, 24
Du Mouvement rectiligne uniformément accéléré ou de la chûte libre des Corps, & de leurs mouvements ſur des plans inclinés, 28
Comment il faut concevoir l'action de la peſanteur dans la chûte des Corps, 31
Formules pour le Mouvement uniformément accéléré, 34
De la deſcente libre des Corps ſur des plans inclinés, *ibid.*
Du Mouvement rectiligne relatif, 38

SECONDE PARTIE.

De la rencontre mutuelle des Corps mus en ligne droite. De la rencontre & de l'oppoſition des forces.

PREMIERE SECTION.

De la rencontre mutuelle des Corps, 45
Du choc direct, 47

Digitized by Google

Regles du choc direct des Corps non élastiques, 48
Regles du choc direct des Corps à ressort parfait mus dans un même sens, 52
Regles pour les corps à ressort parfait mus dans des sens opposés, 54
Du choc oblique, 55
Application des Regles du choc des Corps à ressort à la pratique du jeu de Billard, 61

SECONDE SECTION.

De la Rencontre mutuelle & de l'opposition des forces, 64
Suppositions ou demandes, ibidem.
De l'Equilibre en général, & en particulier dans les Machines, 65
Examen de l'effet qu'on peut attendre des Machines, 68
Des Machines en général, 71
Des Machines simples. *Du Levier.* 72
De la Poulie, 76
Du Tour, 79
Du Plan incliné, 82
Des Poids soutenus par des cordes, 83
Des Machines composées, 85
Du Coin, 86
Remarques sur la force de percussion, 88
Des Rouages, 89
Calcul pour le nombre de dents des rouages, 91
De la vis & de son écrou, 94
De la vis sans fin, 96
Des Mouffles. 99
Des principales causes qui font obstacle à l'effet des Machines, & de la maniere d'y avoir égard dans les calculs, 101
Des frottements, 104
Des moments & des centres de gravité, & de la maniere de les déterminer, 106
Formule générale pour trouver les centres de gravité par le calcul intégral, 117
Propriétés des centres de gravité, 118
Des mouvements du centre de gravité, ibidem.

La

Digitized by Google

La regle de Guldin, 127
De la ſtabilité des corps peſants, 128

TROISIEME PARTIE.

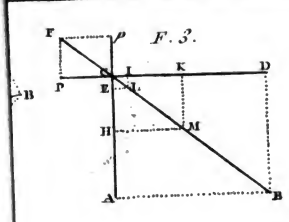
Des Mouvements en ligne courbe.

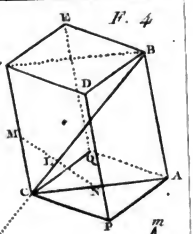
ARTICLE I. *Origine & propriétés générales du Mouvement en ligne courbe*, 132
Principes généraux ſur les Mouvements en ligne courbe, 137
Remarques ſur le calcul des mouvements variés dans les lignes courbes, 139
ARTICLE II. *Du mouvement de projection, ou du mouvement produit par une force primitivement imprimée, & par la peſanteur*, 142
Remarques ſur la Théorie précédente, 148
Origine du ſyſtême Phyſique de l'Aſtronomie, 149
ARTICLE III. *Des mouvements de Rotation & d'Oſcillation*, 151
Du mouvement de Rotation en général, à l'égard des Corps ſans peſanteur, & entiérement libres, 154
Des mouvements de rotation des Corps libres dans les premiers inſtants d'un choc, conſidérés relativement à leur poſition avant le choc, 159
Du mouvement de rotation uniforme des Corps autour d'un point fixe, en ne conſidérant que leur inertie, 165
Du mouvement d'oſcillation, ou de la rotation des corps peſants autour d'un point fixe, 169
Des Pendules compoſés, 175
Formule générale pour trouver les centres d'oſcillation par le calcul intégral. 179
Du mouvement du Pendule ſimple dans la Cicloïde, 181
Origine & propriétés de la Cycloïde, ibid.
Application & uſages de toute la Théorie précédente, 187

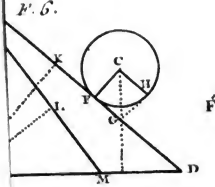
FIN de la Table.

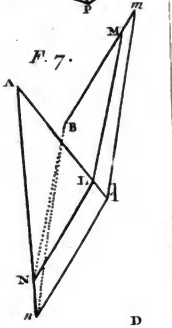
Digitized by Google

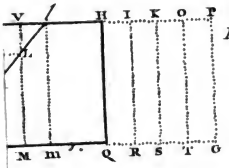
Digitized by Google

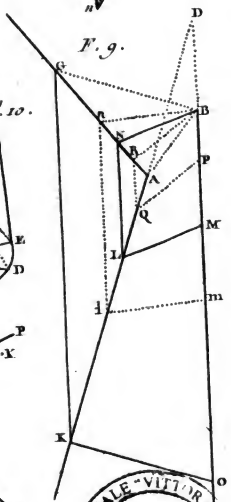


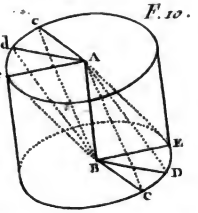


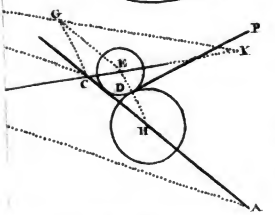






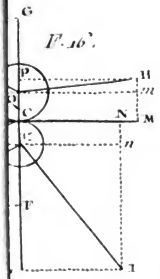




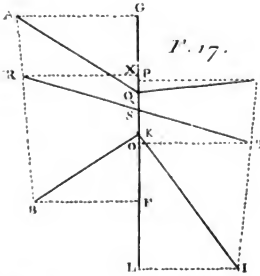


BIBLIOTECA NAZIONALE VITTORIO NAPOLI
Digitized by Google

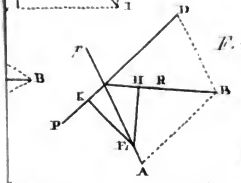
Digitized by Google



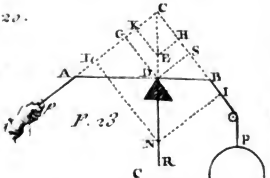
P. 16.



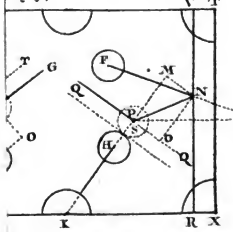
P. 17.



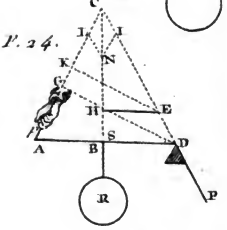
P. 20.



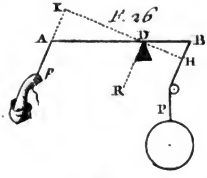
P. 23



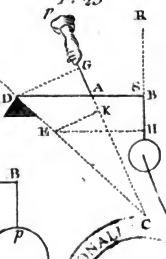
P. 22.



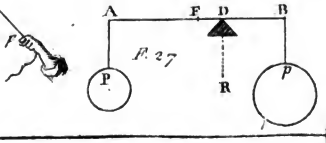
P. 24.



P. 26



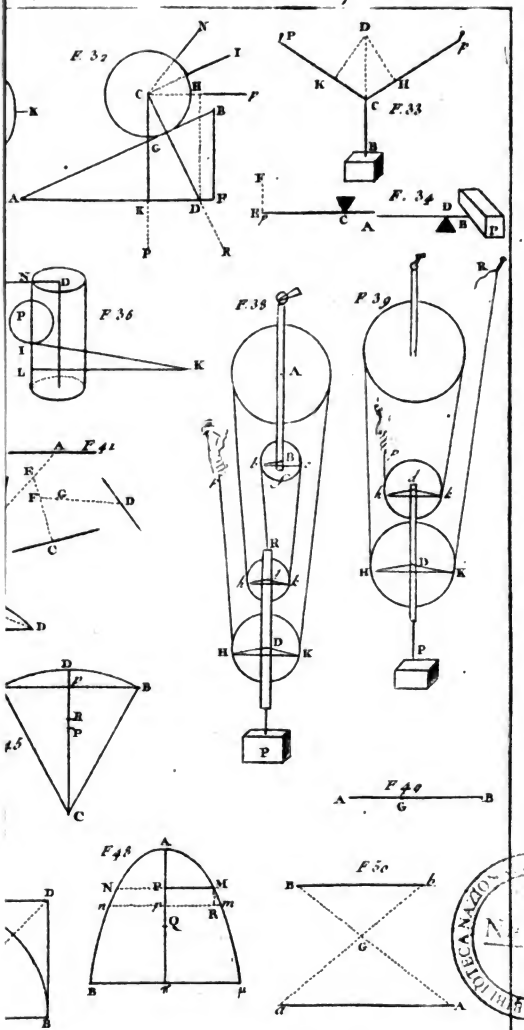
P. 25



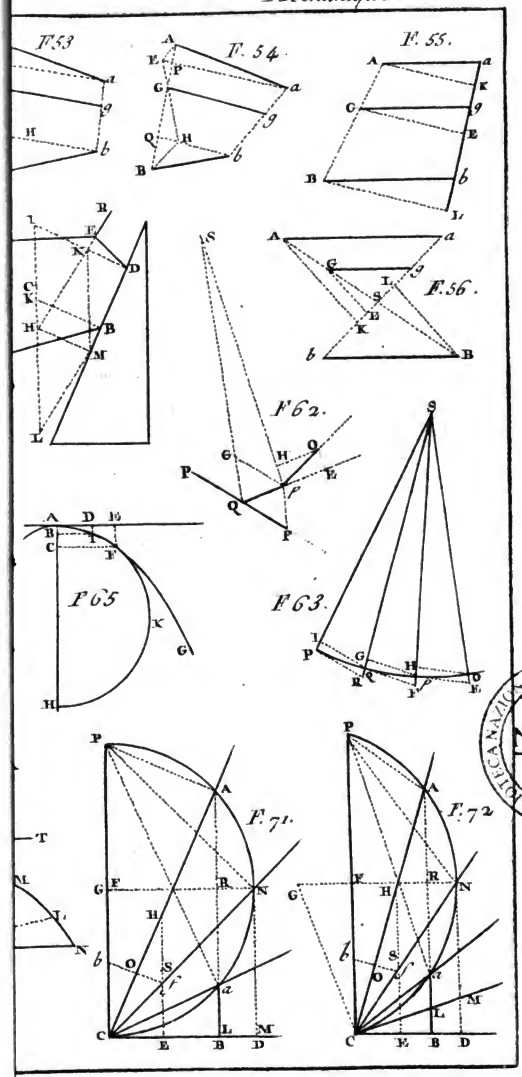
P. 27

BIBLIOTECA NAZIONALE
NAPOLI

Digitized by Google


F. 32
F. 33
F. 34
F. 36
F. 38
F. 39
F. 41
F. 40
F. 48
F. 50
Digitized by Google

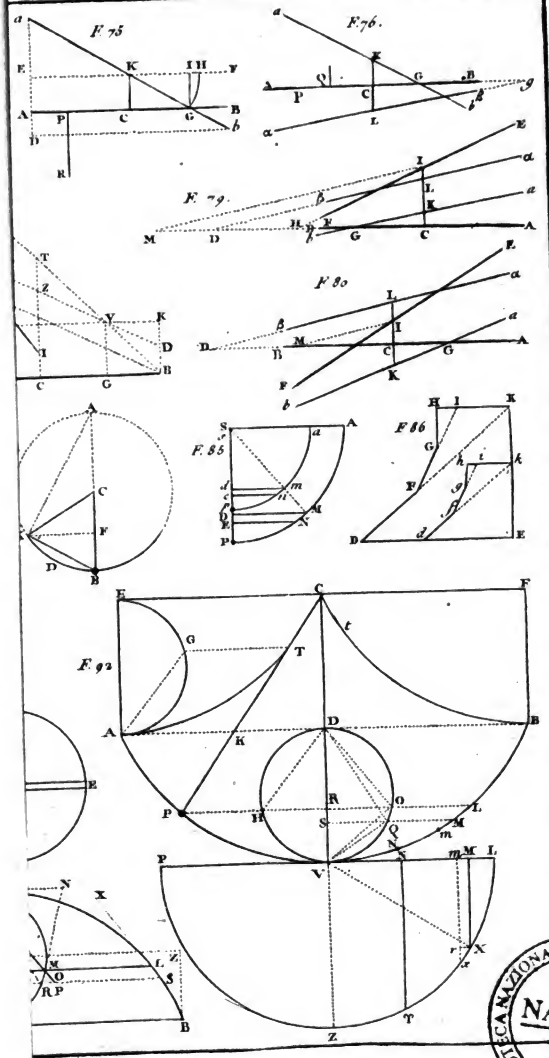
Digitized by Google



BIBLIOTECA NAZIONALE VITT
NAPOL

Digitized by Google

Digitized by Google



Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google